Lektion 7

[7.4] $A = \{1,2,3,4\}$

a) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

b) refl. och trans. men ej symm.:

$\{\underbrace{(1,2),(2,3),(1,3)}_{\text{transitiv ty: } 1\leq 2,\ 2\leq 3 \text{ och } 1\leq 3.},\ \underbrace{(1,1),(2,2),(3,3)}_{\text{reflexiva ty } x\leq x}\}$

c) symm. och trans. men ej reflexiv:

$\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(2,3),(1,3)\}$

[7.5]

a) $R = \{(x,y) : x < y+1\}$ på $\mathbb{Z}$

1) $x < x+1$ stämmer $\forall x \Rightarrow$ reflexiv

2) $x < y+1 \rightarrow y < x+1$? tex

$3 < 4+1 \rightarrow 4 \not< 3+1 \Rightarrow$ antisymmetrisk ty symm. omm $x=y$

3) $x < y+1,\ y < z+1 \rightarrow x < z+1$? $\rightarrow$ transitiv

svar) reflexiv och transitiv (och antisymmetrisk)

b) $R = \{(x,y) : x < y+1\}$ på $\mathbb{R}$

1) $x < x+1$ stämmer $\forall x \Rightarrow$ reflexiv

2) $x < y+1 \rightarrow y < x+1$? p.s.s $\Rightarrow$ ej symm.

3) $x < y+1,\ y < z+1 \rightarrow x < z+1$?

$$\left.\begin{array}{l} 1.5 < 0.6+1 \\ 0.6 < 0.4+1 \\ 1.5 \not< 0.4+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ej transitiv}$$

svar) reflexiv

c) $R = \{(x, y) : x | y\}$ på $\{2, 3, 6, 12, 18\}$

1) $2|2$ Ja ... $18|18$ $\Rightarrow$ reflexiv

2) $2|6 \rightarrow 6|2$? Nej $\Rightarrow$ antisymmetrisk

3) $2|6 \rightarrow 6|12 \rightarrow 2|12$ $\Rightarrow$ transitiv

d) $R = \{(x, y) : x \geq y\}$ på $\mathbb{N}$

1) $x \geq x \ \forall x$ $\Rightarrow$ reflexiv

2) $x \geq y \rightarrow y \geq x$? Nej då måste $x = y$ $\Rightarrow$ antisymmetrisk

3) $x \geq y, y \geq z \rightarrow x \geq z$ stämmer $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ transitiv

svar: reflexiv,
antisymmetrisk,
transitiv

[7.7] $A = \{$Binära följder av längd 10$\}$

$a R b$ om a innehåller lika många ettor som b.

a) 1) a innehåller lika många ettor som sig själv $\Rightarrow$
reflexiv

2) om $a R b$ så är $b R a$ ty lika många ettor $\Rightarrow$
symmetrisk

3) om $a R b$ och $b R c$ så $\Rightarrow a R c$

1, 2, 3 ger att R är en ekvivalensrelation.

b) ekvivalensklasser = antal element som är ekvivalenta med ett givet element. t.ex. allar relationer med 2 antal ettor. Då finns det:

11 st klasser (0 ettor, 1 etta, 2 ettor ... 10 ettor)

[7.10] $|B| = 3$

antal relationer aRb, $a \in A$, $b \in B$ är 4096

Vad är $|A|$?

$|A| = n$ $|A \times B| = 3n$

Det finns 2^{3n} relationer

$2^{3n} = 4096 \Rightarrow 2^{3n} = 2^{12} \Rightarrow n = 4$.

[7.21] $A = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$

R def. som $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ om $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

a) Visa att R är en ekv. rel. på A:

1) $x_1 + y_1 = x_1 + y_1 \quad \forall x, y \Rightarrow$ reflexiv!

2) $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow x_2 + y_2 = x_1 + y_1$ ✓ $\Rightarrow$ symmetrisk!

3) $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ och $x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \Rightarrow$
$x_1 + y = x_3 + y_3$ $\Rightarrow$ transitiv

$\therefore R$ är en ekvivalensrelation på A.

b) Ekvivalensklasser för $(1,3)$, $(2,4)$ och $(1,1)$

$[(1,3)] = \{(3,1), (2,2), (1,3)\}$

$[(2,4)] = \{(4,2), (1,5), (5,1), (3,3), (2,4)\}$

$[(1,1)] = \{(1,1)\}$

c) $\{(1,1)\} \cup \{(1,2), (2,1)\} \cup \{(1,3), (3,1), (2,2)\} \cup$

$\{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} \cup \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\} \cup$

$\{(2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \cup \{(3,5), (5,3), (4,4)\} \cup$

$\{(4,5), (5,4)\}, \{(5,5)\}$

Alla mängder är parvis disjunkta!

[7.24]

R på $\mathbb{Z}_+$ def: xRy om $\frac{x}{y} = 2^n$ $n \in \mathbb{Z}$

a) • $\frac{x}{x} = 1 = 2^0$ $\forall x$ $\Rightarrow$ reflexiv!

• om $\frac{x}{y} = 2^n \rightarrow \frac{y}{x} = 2^m$? Ja $m = -n$ $\Rightarrow$ symmetrisk!

• om $\frac{x}{y} = 2^n$ och $\frac{y}{z} = 2^m \Rightarrow \frac{x}{z} = 2^k$ Ja $\Rightarrow$ transitiv!

b) $[1] = \{y \in \mathbb{Z}_+ : yR1\} = \{2, 4, 8, \ldots = 2^n\}$

$[2] = [1]$

$[4] = [2] = [1]$

$[3] = \{1, 3, 6, 12, \ldots\}$

$\therefore$ 2 st, ($[1] = [2] = [4]$)

c) $[7] = \{1, 7, 14, 28, 56, \ldots\}$

$[21] = \{1, 21, 42, 84, \ldots\}$

$[28] = \{1, 7, 14, \ldots\} = [7]$

$[6] = \{1, 6, 12, 24, \ldots\}$

$[24] = \{1, 6, 12, 24, \ldots\} = [6]$

$[35] = \{1, 35, 70, \ldots\}$

$[42] = \{1, 21, 42, 84, \ldots\} = [21]$

$[48] = \{1, 6, 12, 24, \ldots\} = [6]$

$\therefore$ $[6] = [24] = [48]$

$[7] = [28]$

$[35]$

$[21] = [42]$

Totalt 4 st olika

[7.16]

Endast a) utgör en partition av A ty A_1, A_2 och A_3 är parvis disjunkta och $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$.

[12.2]

$x \, R \, y$ om $x-y$ är ett icke-neg. jämnt heltal.

a) Reflexiv? $x - x = 0$ -0.2 ok $k \geq 0$

Antisymmetrisk? Om $x R y$ och $y R x$

$x - y = 2k$, $k \geq 0$ och $y - x = 2m$, $m \geq 0$

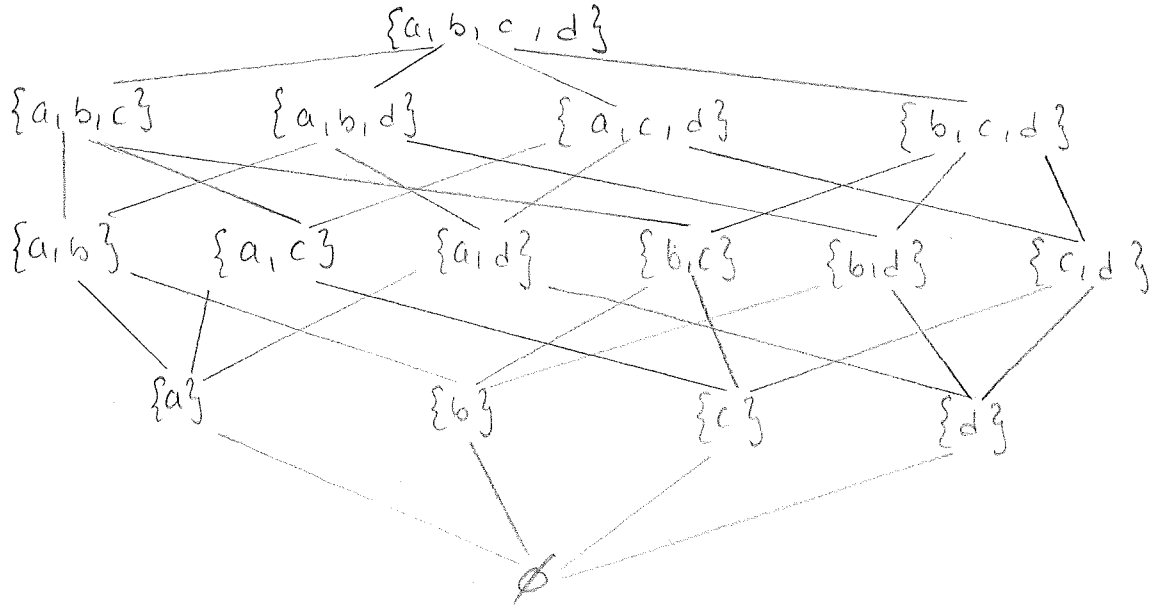
men $y - x = -(x-y)$ så $2k = -2m$ med $k, m \geq 0$ då $k = m = 0$

och $x = y$

b)

0,1

[12.4] $(\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}), \subseteq)$



mängder:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$

$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$

[12.6]

R def som $(a,b) R (c,d)$ om antingen

$a < c$ eller både

$a = c$ och $b \leq d$. Visa att detta är en partiallordning på $\mathbb{R}^2$

Reflexiv?

$(a,b) R (a,b)$? $a = b$ och $b \leq b \Rightarrow$ ok.

Antisymmetrisk?

$(a,b) R (c,d)$ och om $(c,d) R (a,b) \Rightarrow a = c$ och $b = d$?

Ja ty om det ska gälla att $a = c$ och $b \leq d$ så måste $b = d \Leftrightarrow d = b$. ok

Transitiv?

$(a,b) R (c,d)$ och $(c,d) R (e,f) \Rightarrow (a,b) R (e,f)$

- Fall 1: $a < c \Rightarrow c < e \Rightarrow a < e$ ok
- Fall 2: $a = c \Rightarrow b \leq d \Rightarrow$

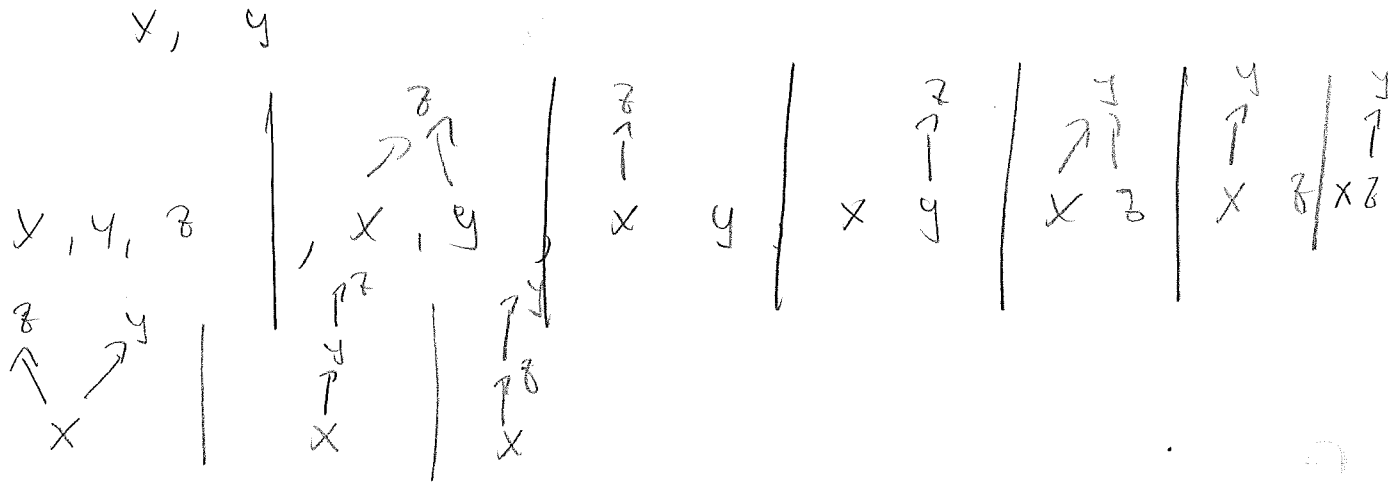
  $c = e \Rightarrow d \leq f \Rightarrow$

  $a = e \Rightarrow b \leq f$ ok

V.S.V

[12.13] Hur många partialordningar på mängden $\{x, y\}$ har x som ett minimalt element?

a)



b) $\{x, y, z\}$

[12.15] $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : 2 \le n \le 2000\}$ po-mängd $(A, |)$.

a) Lattice? $\{1999, 2000\}$ det största finns

möb $\{1999, 2000\}$ och sub $\{1999, 2000\}$ finns inte

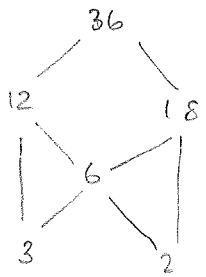
a Maximal om det inte finns $x \in A$ med $x \neq a$, $a \mid x$ $(x = ka, k \in \mathbb{Z})$

$a \geq 1001$ är a maximal, det finns 1000 sådana tal

Dvs. a kan inte dela någonting,

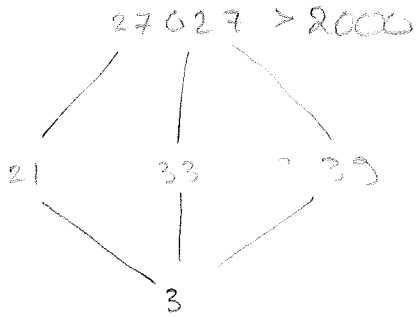
b) möb $\{12, 18\} = 36$

sub $\{12, 18\} = 6$



c) möb $\{21, 33, 39\}$?

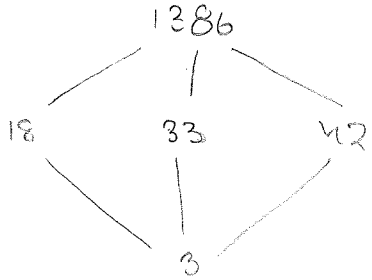
saknas



sub $\{21, 33, 39\} = 3$

d) möb $\{18, 33, 42\} = 1386$

sub $\{18, 33, 42\} = 3$



e) ? ? ? Hur ta reda på?

f) Primtalen i A!

Lektion 8

[6.3]

visa att $3 \mid 7^n - 4^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Induktionsbas:

$3 \mid 7^1 - 4^1 \Rightarrow 3 \mid 3$ ok

Induktionsantagande:

$7^p - 4^p = 3k \quad \Rightarrow \quad 7^p = 3k + 4^p$

induktionssteg:

$3 \mid 7^{p+1} - 4^{p+1} \Rightarrow 7 \cdot 7^p - 4^{p+1} = 7 \cdot (3k + 4^p) - 4 \cdot 4^p =$

$21k + 3 \cdot 4^p = 3(7k + 3 \cdot 4^p)$, detta visar att

$3 \mid 7^{p+1} - 4^{p+1}$

V.S.V

[6.6]

Låt p och q vara primtal. Visa att $p \mid q$ o.m.m $p = q$

om $p \mid q \Rightarrow pk = q \Rightarrow k = \frac{q}{p} \Rightarrow \{q \text{ och } p \text{ primtal}\} \Rightarrow$

$k = 1$ och $q = p$.