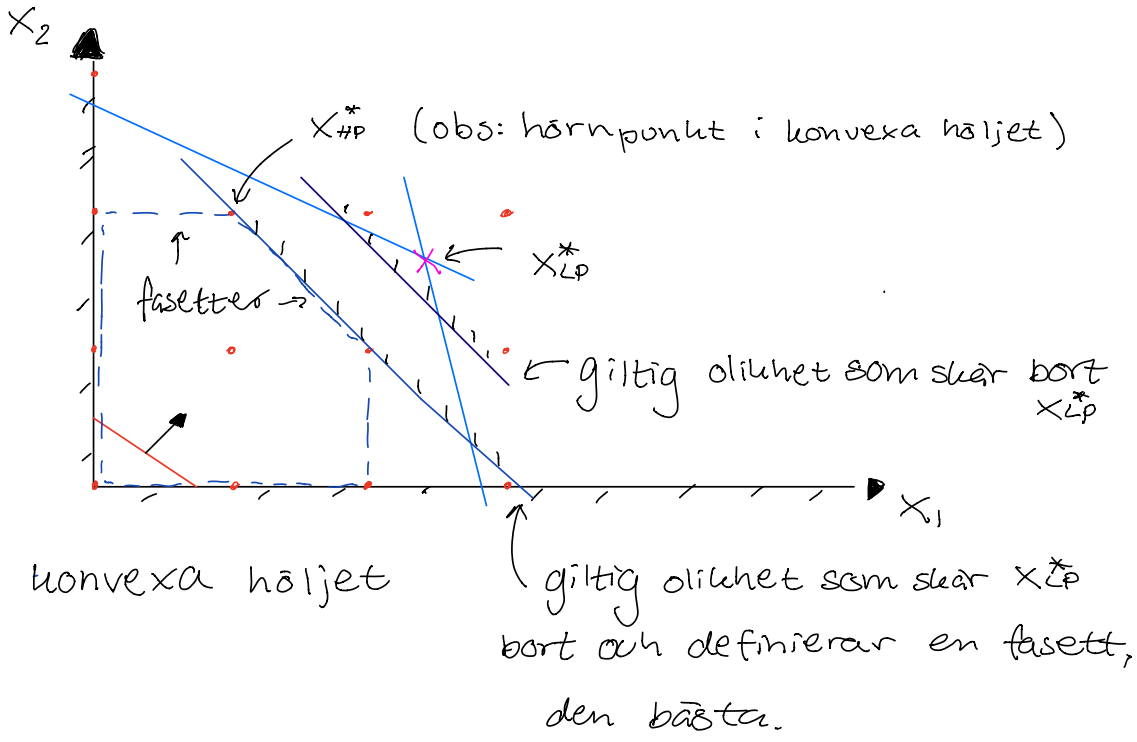
# Föreläsning 10

TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Heltalsoptimering

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/




-- konvexa höljet

## Gomory-snitt

Ett sätt att ta fram giltiga olikheter som skär bort LP-optimum.

$$\min z = c^T x$$
$$\text{då} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0 \text{ och heltalig}$$

där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}$ och $c \in \mathbb{R}^n$ är heltalig

Antag att LP-optimum fås i baslösningen

$$\begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

Villet kan skrivas som

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$$

Rad ur optimala simplextablån:

$$x_3 + \frac{7}{4} x_5 - \frac{5}{4} x_7 + \frac{1}{4} x_8 = 5\frac{3}{4}$$

basvariabel

icke-basvariabler

då gäller:

$$x_3 = 5\frac{3}{4}, \quad x_5 = x_7 = x_8 = 0$$

Skrivs som:

$$x_3 + \left(1 + \frac{3}{4}\right) x_5 + \left(-2 + \frac{3}{4}\right) x_7 + \left(0 + \frac{1}{4}\right) x_8 = 5 + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_3 - 5 + x_5 - 2x_7 + 0x_8 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} x_5 - \frac{3}{4} x_7 - \frac{1}{4} x_8$$

$HL < \frac{3}{4}$, $VL =$ heltal

Alltså:

$$x_3 - 5 + x_5 - 2x_7 + 0x_8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_3 + x_5 - 2x_7 + 0x_8 \leq 5$$

Gomorys heltalsskitt

Alternativt:

$$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_7 - \frac{1}{4}x_8 \leq -\frac{3}{4}$$

Gomorys fraktionella snitt.

OBS: dessa två ekvivalenta.

Uppfyller LP-optimum snittet?

Heltalssnittet:

$$5\frac{3}{4} + 0 - 2\cdot 0 + 0\cdot 0 \not\leq 5$$

Nej $\Rightarrow$ LP-optimum skärs bort!

Ex:

$$\max\ z = 4x_1 - x_2$$

då
$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, \ldots\ldots\ldots, x_5 \geq 0 \text{ och heltalig} \end{cases}$$

$x_3, x_4, x_5$ är slackvariabler

$z$ ska också bli heltalig!

Optimaltablå för LP-relaxationen:

| bas | $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | värde |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | | | $-4/3$ | $-1/7$ | | $-59/7$ ← |
| $x_1$ | | 1 | | $1/7$ | $2/7$ | | $20/7$ ← |
| $x_2$ | | | 1 | | 1 | | 3 |
| $x_5$ | | | | $-2/7$ | $10/7$ | 1 | $23/7$ ← |

Vilken rad ska väljas?

Fraktioner: heltalsdelen

$$-z: -\frac{59}{7} - \left\lfloor -\frac{59}{7} \right\rfloor = -\frac{59}{7} - (-9) = \frac{4}{7}$$

$$x_1: \frac{20}{7} - \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = \frac{20}{7} - 2 = \frac{6}{7} \leftarrow$$

$$x_5: \frac{23}{7} - \left\lfloor \frac{23}{7} \right\rfloor = \frac{23}{7} - 3 = \frac{2}{7}$$

Välj den största!

$x_1$-raden:

$$x_1 + \frac{1}{7} x_3 + \frac{2}{7} x_4 = \frac{20}{7}$$

heltalssnitt:

$$x_1 + \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor}_{=0} x_3 + \underbrace{\left\lfloor \frac{2}{7} \right\rfloor}_{=0} x_4 \leq \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq 2$$

inför slackvariabel

$x_6 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_6 = 2 \\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

addera till LP-relaxationen och lös om LP!

Ny optimaltablå:

| bas | $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | värde |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | | | | | $-1/2$ | $-3$ | $-15/2$ |
| $x_1$ | | 1 | | | | | 1 | 2 |
| $x_2$ | | | 1 | | | $-1/2$ | 1 | $1/2$ |
| $x_3$ | | | | 1 | | $-1$ | $-5$ | 1 |
| $x_4$ | | | | | 1 | $1/2$ | $-1$ | $5/2$ |

OBS: $\frac{15}{2} < \frac{59}{7}$, ty gamla LP-optimum skars bort!

alla fraktioner $= 1/2$

Välj tex $x_2$-raden:

$$x_2 - \frac{1}{2} x_5 + x_6 = \frac{1}{2}$$

heltalssnitt:

$$x_2 - x_5 + x_6 \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_7 \geq 0 \end{cases}$$

addera och lös om LP!

## Ny optimaltablå:

| bas | $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | värde |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | | | | | | $-3$ | $-1$ | $-7$ |
| $x_1$ | | 1 | | | | | 1 | | 2 |
| $x_2$ | | | 1 | | | | 1 | $-1$ | 1 |
| $x_3$ | | | | 1 | | | $-5$ | $-2$ | 2 |
| $x_4$ | | | | | 1 | | $-1$ | 1 | 2 |
| $x_5$ | | | | | | 1 | | $-2$ | 1 |

Obs: $7 < \frac{15}{2}$

## Heltaligt!

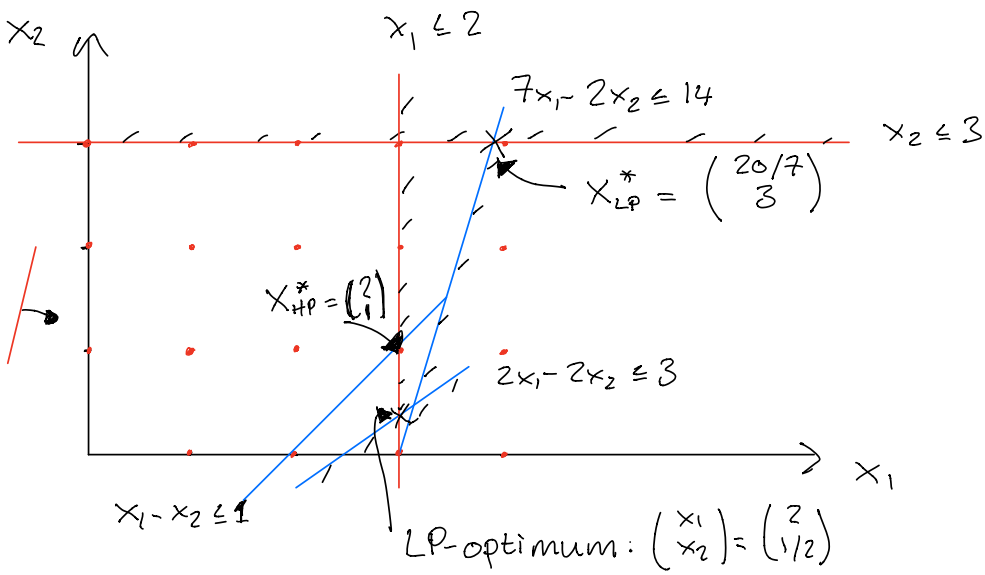
Alltså:

$$x^*_{HP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z^*_{HP} = 7$$

## Grafiskt?

$$x_2 - x_5 + x_6 \leq 0 \iff x_2 - (3 - 2x_1 + 2x_2) + (2 - x_1) \leq 0$$

$$\iff x_1 - x_2$$



## Trädsökning:

Metodprincip för heltalsproblem.

Komponenter:

- relaxering (oftast: LP)
- förgrening
- avsökningsstrategi
- beskärning (ta bort ointressanta problem).

**Ex:** Som ovan

$$\max z^*_{HP} = 4x_1 - x_2$$

$$\text{(PO)} \quad \text{då} \quad \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \le 14 \\ x_2 \le 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{ och heltalig} \end{cases}$$

LP-optimum:

$$x^*_{LP} = \begin{pmatrix} 20/7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow z^*_{LP} = \frac{59}{7} \Rightarrow z^*_{HP} \le \lfloor \frac{59}{7} \rfloor = 8$$

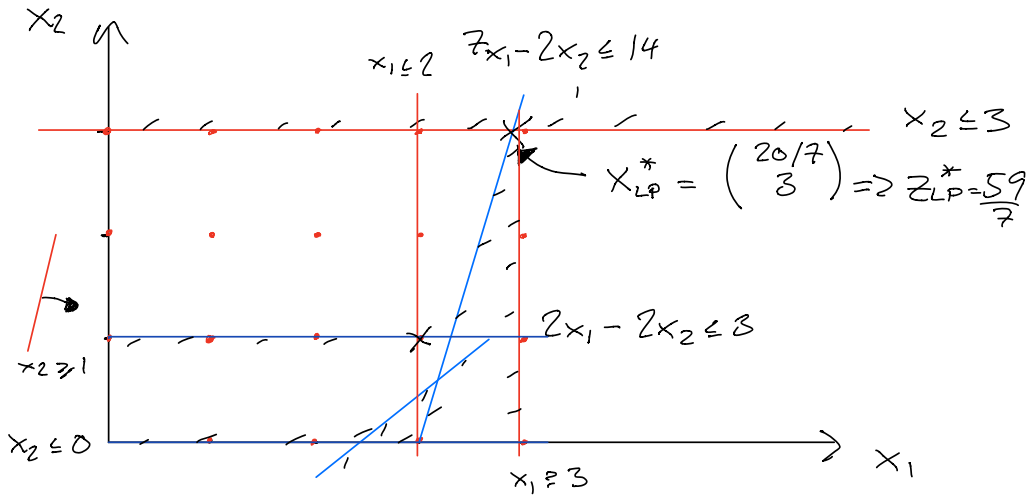
$x^*_{LP}$ ej heltalig $\Rightarrow$ förgrena

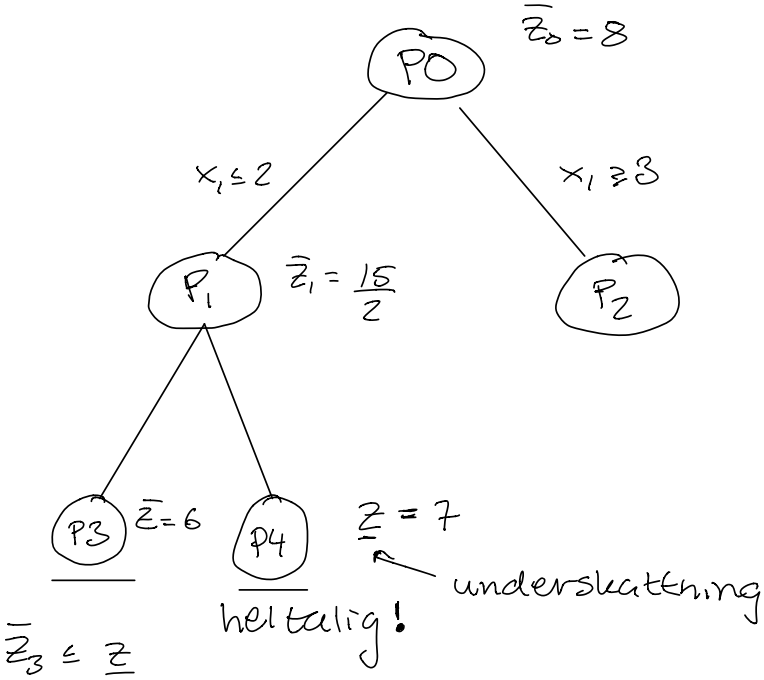
Skapa problemen:

$P_1$: PO och $x_1 \le \lfloor 20/7 \rfloor = 2$

$P_2$ PO och $x_1 \ge \lfloor 20/7 \rfloor + 1 = 3$

Obs: varje tillåten lösning till PO finns i P1 eller P2!


$x_2$
$x_1 \le 2$
$7x_1 - 2x_2 \le 14$
$x_2 \le 3$
$x^*_{LP} = \begin{pmatrix} 20/7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow z^*_{LP} = \frac{59}{7}$
$2x_1 - 2x_2 \le 3$
$x_2 \ge 1$
$x_2 \le 0$
$x_1 \ge 3$
$x_1$


$\bar{z}_0 = 8$
P0
$x_1 \le 2$
$x_1 \ge 3$
P1
$\bar{z}_1 = \frac{15}{2}$
P2
P3
$\bar{z} = 6$
P4
$\underline{z} = 7$
underskattning
heltalig!
$\bar{z}_3 \le \underline{z}$

LP-optimum för P2:

otillåtet!

LP otillåtet => finns inga heltalslösningar!

Kapa grenen!

LP-optimum för P1:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ med } z = \frac{15}{2}$$

Ej heltaligt! Förgrena!

P3: P1 och $x_2 \leq \lfloor 1/2 \rfloor = 0$

P4: P1 och $x_2 \geq \lfloor 1/2 \rfloor + 1 = 1$

LP-optimum för P4:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 7$$

Heltalig lösning => kapa!

LP-optimum för P3:

$$x = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 6$$

$\bar{z}_3 \leq \bar{z}$ => ingen bättre heltalslösning finns i grenen => klara!

Allt avslöjat!

$$x_{HP}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_{HP}^* = 7.$$