SAMMANFATTNING TATA52
Diskret matematik

LÄST SOM EN DEL AV CIVILINGENJÖRSPROGRAMMET I INDUSTRIELL EKONOMI VID LITH, VT 2016

Senast reviderad: 2017-05-20
Författare: Viktor Cheng och Erik Frank

Innehållsförteckning

Kombinatorik

Kombinatorik handlar om uppräkningar av element i mängder och kan till exempel användas för att beräkna:

- Antalet sätt att dra 2 blå kulor i en kulpåse med 2 blå kulor och 8 vita kulor
- Antalet sätt man kan erhålla två sexor vid sex tärningskast med kubisk tärning

Multiplikationsprincipen och additionsprincipen

Beskrivning	**Multiplikationsprincipen**	**Additionsprincipen**
Användningsområde	Vid utförande av n olika moment i tur och ordning	Vid utförande av *ett av* n olika moment i tur och ordning
Antal sätt att utföra varje moment	Första momentet kan utföras på n_1 sätt, andra momentet kan utföras på n_2 sätt, …, sista momentet kan utföras på n_m sätt	Första momentet kan utföras på n_1 sätt, andra momentet kan utföras på n_2 sätt, …, sista momentet kan utföras på n_m sätt
Totalt antal sätt att utföra uppgiften	$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$	$n_1 + n_2 + \cdots + n_m$

Exempel på multiplikationsprincipen

Bodil ska välja outfit. I sin garderob har hon 3 skor, 10 byxor, 20 hattar, 2 blusar och 1 jacka. På hur många sätt kan hon välja sin outfit?

Svar: Vi antar att hon väljer plagg i tur och ordning. Hon har $n_1 = 3$ st skor, så hon kan välja dessa på 3 sätt. På samma sätt har hon $n_2 = 10$ byxor, $n_3 = 20$ hattar, $n_4 = 2$ blusar och $n_5 = 1$ jacka. Enligt multiplikationsprincipen kan hon därför välja outfit på $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 1200$ sätt.

Exempel på additionsprincipen

Bodil ska välja outfit till sig ELLER sin hund Bertil. I sin garderob har hon 3 skor, 10 byxor, 20 hattar. Bertil har 4 koppel och 2 jackor. Bodil måste välja ett plagg i varje kategori. Hur många valmöjligheter har Bodil i sitt val av outfit till sig själv och Bertil?

Svar:

Bodil: Vi antar att hon väljer plagg i tur och ordning. Hon har $n_1 = 3$ st skor, så hon kan välja dessa på 3 sätt. På samma sätt är $n_2 = 10$ och $n_3 = 20$. Detta innebär att hon kan välja outfit på $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 600$ sätt.

Bertil: Vi antar att plaggen väljs i tur och ordning. Då gäller att $n_1 = 4$ och $n_2 = 2$.
Detta innebär att Bertils outfit kan väljas på $n_1 \cdot n_2 = 8$ sätt.

Bodil + Bertil: Enligt additionsprincipen finns det totalt $600 + 8 = 608$ sätt att välja outfits till Bodil och Bertil.

Kombinationer och permutationer

Beskrivning	Kombinationer	Permutationer
Hur många föremål har vi?	f föremål	f föremål
Hur stort är urvalet?	s föremål, där $0 \leq s \leq f$	s föremål, där $0 \leq s \leq f$
Spelar det roll hur föremålen är ordnade inbördes / i vilken ordning de väljs?	Nej, spelar ingen roll hur föremål är ordnade inbördes eller i vilken ordning de väljs.	Ja, spelar roll hur föremål är ordnade inbördes eller i vilken ordning de väljs.
Det totala antal möjliga kombinationer / permutationer blir …	$\binom{f}{s} = \frac{f!}{s!\,(f-s)!}$	$f \cdot (f-1) \cdot \ldots \cdot (f-s+1) = \frac{f!}{(f-s)!}$
Symbol	$C(f,s) = \frac{f!}{s!\,(f-s)!}$	$P(f,s) = \frac{f!}{(f-s)!}$

Generellt avgörs "antal sätt" av formeln:

$$\text{Antal sätt} = \text{sätt att välja} \cdot \text{sätt att placera}$$

I specialfallet "På hur många sätt kan man välja …" så är bara välja-delen intressant, dvs $\text{sätt att placera} = 1$.

Kombinationer med upprepningar

- n olika objekt: $a_1, a_2 \ldots, a_n$
- Urval av storlek $k \geq 1$ objekt där man inte tar hänsyn till ordning bland objekt
- Varje objekt förekommer inte alls, en gång eller flera gånger
- "Antal kombinationer med upprepningar av storlek k" = $\binom{k+n-1}{k}$
- Kan ofta reduceras till "Antal lösningar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ till en ekvation av typ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

Exempel 4.6.6: Bestäm antal lösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ där $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ är heltal. och a) $x_2 \geq 1$ och b) $1 \leq x_2 \leq 4$

Vid $x_i \geq a$ (dvs allt annat än $x_i \geq 0$), utför "variabelbyte" med $t = x_i - a \geq 0$	$x_2 \geq 1$ $\rightarrow t = x_2 - 1 \geq 0$
Skriv om ekvation	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ $\rightarrow x_1 + (x_2 - 1) + x_3 + x_4 = 7 - 1$ $\Leftrightarrow x_1 + t + x_3 + x_4 = 6$
Ekvationer av typ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ har…	$\binom{k+n-1}{k} = \binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$ lösningar

Alla lösningar som uppfyller $1 \leq x_2 \leq 4$ = lösningar som uppfyller $x_2 \geq 1$ minus lösningar som uppfyller $x_2 \geq 5$	Lösningar som uppfyller $x_2 \geq 1$: $\binom{9}{6}$
Lösningar som uppfyller $x_2 \geq 5$? Variabelbyte + skriv om ekvation ⇒	$x_1 + (x_2 - 5) + x_3 + x_4 = 7 - 5$ $\Leftrightarrow x_1 + t + x_3 + x_4 = 2$
Ekvationer av typ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ har…	$\binom{k+n-1}{k} = \binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2}$ lösningar
Sammanställ resultat	Lösningar som uppfyller $1 \leq x_2 \leq 4$: $\binom{9}{6} - \binom{5}{2}$

TENTA 2015-10-22 uppgift 2: Hur många åttasiffriga tal med enbart olika siffror finns det där siffrorna $1, 2$ och 3 förekommer direkt på varandra följande och i den ordningen?

Vilka förutsättningar har vi?	• Det finns 10 siffror: $1,2,\dots,8,9,0$ • Vi vill ha olika siffror på varje plats i talet • Talet är 8 siffror långt • Kombinationen 123 ska förekomma en gång och i exakt den ordningen
Eftersom den exakta kombinationen 123 måste förekomma så inför vi den som en ny symbol	Vårt nya "siffersystem" består av: $123,4,5,6,7,8,9,0$
Frågan kan ställas som "Antal sätt att skapa åttasiffriga tal med enbart olika siffror …"	$\Rightarrow$ Använd Antal sätt $= \text{sätt att välja} \cdot \text{sätt att placera}$
Antal sätt att välja 123	123 kan bara väljas på 1 sätt
Antal sätt att placera 123	123 kan placeras som $123xxxxx$, $x123xxxx$, … $xxxx123x$, $xxxxx123$ = totalt 6 st positioner
Antal sätt att välja resterande $8-3=5$ siffror	Det finns 7 siffror kvar $(4,5,6,7,8,9,0)$ och av dessa ska 5 väljas. Ordningen spelar ingen roll $\Rightarrow$ Kombinationer $\Rightarrow \binom{7}{5}$
Antal sätt att placera resterande 5 siffror	Finns 5 positioner "kvar" i det åttasiffriga talet. Vid position 1 kan 5 siffror placeras, vid position 2 kan 4 siffror placeras osv … $\Rightarrow$ Totalt $5!$ kombinationer
Sammanställ resultaten	$\text{Antal sätt} = 1 \cdot 6 \cdot \binom{7}{5} \cdot 5!$

TENTA 2015-08-20 uppgift 3: En låda innehåller 9 vita och 6 svarta bollar. Man väljer 5 bollar ur lådan.

a) På hur många sätt kan man välja så att 3 bollar är vita och 2 svarta?

b) På hur många sätt kan man välja så att högst 2 bollar är vita?

Spelar ingen roll om vita bollar eller svarta bollar väljs först (tar inte hänsyn till ordning) $\Rightarrow$ <u>kombination</u>	
Vi behöver välja 3 st vita bollar och det finns totalt 9 st vita.	$\text{Sätt att välja 3 vita bollar} = \binom{9}{3}$
Vi behöver välja 2 st svarta bollar och det finns totalt 6 st svarta	$\text{Sätt att välja 2 svarta bollar} = \binom{6}{2}$
Multiplikationsprincipen ger totalt antal sätt att välja 3 st vita bollar och 2 st svarta bollar	$\text{Sätt att välja 3 vita och 2 svarta bollar} = \binom{9}{3}\binom{6}{2}$

Spelar ingen roll om vita bollar eller svarta bollar väljs först $\Rightarrow$ <u>kombination</u>	Däremot är det viktigt att vi väljer högst 2 st vita bollar. Det finns tre sätt att uppnå detta:
Vi väljer 0 vita bollar (och därmed 5 svarta bollar) Vi väljer 1 vita boll (och därmed 4 svarta bollar) Vi väljer 2 vita bollar (och därmed 3 svarta bollar)	$\text{Sätt att välja 0 vita och 5 svarta bollar} = \binom{9}{0}\binom{6}{5}$ $\text{Sätt att välja 1 vit och 4 svarta bollar} = \binom{9}{1}\binom{6}{4}$ $\text{Sätt att välja 2 vita och 3 svarta bollar} = \binom{9}{2}\binom{6}{3}$
Vi lägger ihop alla möjliga sätt att uppnå vårt mål (alternativ 1,2 och 3) med additionsprincipen	$\text{Sätt att välja högst 2 st vita bollar}$ $= \binom{9}{0}\binom{6}{5} + \binom{9}{1}\binom{6}{4} + \binom{9}{2}\binom{6}{3}$

Lådprincipen – ”Pigeonhole principle”

Om o objekt skall placeras i l lådor, där det finns fler objekt än lådor ($o > l$) så kommer minst en låda att innehålla fler än ett objekt. Generellt gäller att om n objekt skall placeras i l lådor där $n > a$ för något positivt heltal a, gäller att minst en låda kommer att innehålla fler än a föremål.

TENTA 2015-08-20 uppgift 2a: I en släkt är alla födda i januari. Maria och Ingvar (båda 65 år i år) är barn till Beatrice, som är dotter till Clara, som är dotter till Daniella, som är dotter till Eugene, som är son till Felix, som är son till Gerd, som är dotter till Hans, som är son till Johannes, som är son till Karl, som föddes 1634 av Antonia. Visa att någon anfader till Maria och Ingvar tillbaka till Karl hade fyllt 36 år när barnet föddes.

<u>Svar</u>: Vi börjar med att ordna förhållanden mellan respektive individ i kronologisk ordning.

1) A – K [År 1634] – J – H – G – F – E – D – C – B – M och I [År 1950]
2) Maria och Ingvar föddes 1950
3) 9 generationer har fötts under 1950 – 1634 = 316 år
4) 316 = 9*35 + 1 och därmed måste minst en anfader/anmoder ha fyllt 36 vid födsel av nästa generation, detta enligt lådprincipen.

TENTA 2015-08-20 uppgift 2b: Man har 20 kort numrerade med tal 1 till 20. I ett spel ligger korten med talen mot bordet och en spelare skall syna 11 kort. Spelaren förlorar om 2 av de synade korten har summa 21. Kan spelaren vinna?

<u>Svar</u>: Vi vill undersöka om spelaren kan välja 11 kort som inte innehåller partitioner av 2 kort som ger summan 21 ⇒ Det finns ett begränsat antal delmängder innehållandes 2 kort ⇒ Vi kan använda lådprincipen.

1) Det finns 10 mängder i partitionen med de 20 korten som ger summa 21. $A_1 = \{1,20\}, A_2 = \{2,19\}, \dots, A_{10} = \{10,11\}$
2) Om spelaren skall välja 11 kort kommer minst en av dessa 10 delmängder att finnas med bland de synade korten (enligt lådprincipen) ⇒ Spelaren kan därför omöjligt vinna spelet.

Mängdlära

Mängdlära är en av grundpelarna inom matematik och används till att kategorisera objekt i grupper baserat på någon typ av gemensam egenskap. Mängder kan ofta delas in i mindre beståndsdelar som kallas delmängder.

Principen om inklusion och exklusion – PIE

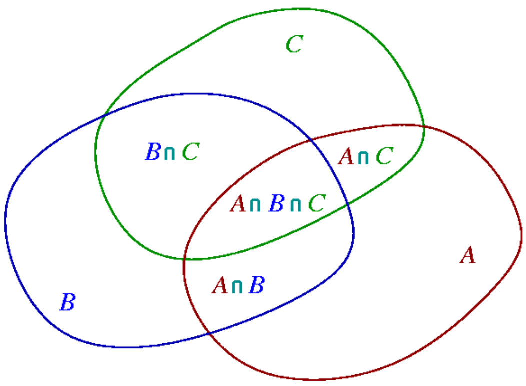
Denna princip är väldigt användbar vid lösning av problem av typen ”*På hur många sätt kan man välja/ordna* x *objekt så att* …”. Det vill säga vid beräkningar av antalet element i en union av flera mängder.

Kom ihåg! Om välja → Kombinationer, om ordna → Permutationer

Formellt beskrivs PIE enligt följande:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j:i<j}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \pm |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Principen kan beskrivas som att man lägger ihop alla mängder för att sedan dra bort de delmängder som räknas två gånger. I specialfallet med $n = 3$ och $A_1 = A, A_2 = B,\ A_3 = C$ kan principen visualiseras enligt följande.



$$\begin{aligned}&|A \cup B \cup C|\\ &= |A| + |B| + |C|\\ &-(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)\\ &+|A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Derangemang

Ett derangemang är en permutation sådan att inget av objekten i en mängd $S_n = \{1,2,3, \ldots, n\}$ befinner sig på sin ursprungliga position, dvs. permutationen av mängden saknar fixa punkter. Fenomenet beskrivs rent matematiskt av sambandet:

$$\text{Antalet derangemang} = !\,n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

TENTA 2012-05-30 uppgift 3b: På hur många sätt kan man välja 3 studentrepresentanter bland 10 studenter från tekfak och 10 studenter från filfak, om minst en student från varje fakultet ska väljas?

<u>Svar</u>: Problemet är på formen ”På hur många sätt kan man välja objekt så att…” → PIE.
Lägg märke till att det i detta fall rör sig om kombinationer då vi inte ombeds ta hänsyn till ordning.

1) Uppgiften går ut på att beräkna antalet kombinationer som innehåller minst en student från varje fakultet → Alla möjliga kombinationer minus antalet kombinationer med endast filfak. eller tekfak. studenter.
2) Alla möjliga kombinationer ges av $\binom{20}{3}$
3) Antalet kombinationer innehållandes endast tekfakstudenter ges av $\binom{10}{3}$
4) Antalet kombinationer innehållandes endast filfakstudenter ges av $\binom{10}{3}$
5) Antalet sätt att välja studentrepresentanter enligt villkor är därför $\binom{20}{3} - \binom{10}{3} - \binom{10}{3}$

TENTA 2015-06-04 uppgift 6: Hur många permutationer av talen $1,2,\ldots,10$ finns det så att inget udda tal hamnar på sin naturliga position?

Vad innebär det att ”inget udda tal hamnar på sin naturliga position”?	Detta är ekvivalent med det totala antalet sätt siffrorna kan placeras minus det antal där (minst ett udda tal hamnar på sin naturliga position)
På totalt hur många sätt kan siffrorna placeras?	På ”första platsen” kan vi placera vilket som helst av $1,2,\ldots,10$ (totalt 10 st). På andra platsen kan vi placera alla utom den som blev placerad på första plats (totalt 9 st). På tredje platsen osv. Multiplikationsprincipen ger $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = 10!$ sätt
På totalt hur många sätt kan minst ett udda tal placeras rätt?	$\Rightarrow$ Använd principen om inklusion och exklusion (PIE).
Börja med antalet sätt att placera ut 1 udda tal rätt. Vi har 5 udda tal och ska placera 1 av dem rätt. Resterande 9 platser i talföljden ”spelar ingen roll”.	Sätt att placera 1 udda tal rätt av 5 st = $\binom{5}{1}$ Sätt att placera resterande 9 tal $= 9!$ $\Rightarrow$ Antal sätt att placera 1 udda tal rätt = $\binom{5}{1}9!$
När man placerar ”resterande 9 siffror på valfri platse” ingår t.ex. kombiationen ”2 udda tal hamnar rätt”. Eftersom detta innebär att de kommer att räknas dubbelt i totalen så behöver den kombinationen dras bort.	Sätt att placera 2 udda tal rätt av 5 st = $\binom{5}{2}$ Sätt att placera resterande 8 tal $= 8!$ $\Rightarrow$ Antal sätt att placera 2 udda tal rätt = $\binom{5}{2}8!$
I kombinationen ”2 udda tal rätt” ingår också ”3 udda tal rätt”, som nu har tagits bort helt från totalen. Lägg därför in den igen.	Sätt att placera 3 udda tal rätt av 5 st = $\binom{5}{3}$ Sätt att placera resterande 7 tal $= 7!$ $\Rightarrow$ Antal sätt att placera 3 udda tal rätt = $\binom{5}{3}7!$
I kombinationen ”3 udda tal rätt” ingår också ”4 udda tal rätt”, som nu har lagts till dubbelt i totalen. Dra därför bort den.	Sätt att placera 4 udda tal rätt av 5 st = $\binom{5}{4}$ Sätt att placera resterande 6 tal $= 6!$ $\Rightarrow$ Antal sätt att placera 1 udda tal rätt = $\binom{5}{4}6!$
I kombinationen ”4 udda tal rätt” ingår också ”5 udda tal rätt”, som nu har tagits bort helt från totalen. Lägg därför in den igen.	Sätt att placera 5 udda tal rätt av 5 st = $\binom{5}{5}$ Sätt att placera resterande 5 tal $= 5!$ $\Rightarrow$ Antal sätt att placera 5 udda tal rätt = $\binom{5}{5}5!$
Sammanställ resultaten från PIE	Antal sätt att placera minst 1 udda tal rätt $= \binom{5}{1}9! - \binom{5}{2}8! + \binom{5}{3}7! - \binom{5}{4}6! + \binom{5}{5}5!$
”Inget udda tal på rätt position” = Alla möjliga permutationer – Minst ett udda tal på rätt position	$= 10! - \left(\binom{5}{1}9! - \binom{5}{2}8! + \binom{5}{3}7! - \binom{5}{4}6! + \binom{5}{5}5!\right)$

TENTA 2012-05-30 uppgift 3a: På hur många sätt kan man ordna symboler $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ så att mönstret inte innehåller varken 01 eller $9X$?

Problemet är på formen ”På hur många sätt kan man ordna objekt så att …”	⇒ Använd PIE!
Vad innebär det att ”mönstret inte innehåller varken 01 eller $9X$?”	Detta är ekvivalent med det totala antalet permutationer minus antalet permutationer som innehåller följden 01 och/eller $9X$
På hur många sätt kan symbolerna ordnas? Vad är det totala antalet permutationer?	På ”första platsen” kan vi placera vilket som helst av $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ (totalt 11 st). På andra platsen kan vi placera alla utom den som blev placerad på första plats (totalt 10 st). På tredje platsen osv. Multiplikationsprincipen ger $11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1 = 11!$ sätt
Vad är antalet permutationer som innehåller följden 01 och/eller $9X$?	Låt A_1 = ”mängden av följder som innehåller 01” Låt A_2 = ”mängden av följder som innehåller $9X$”
Notera att A_1 = ”mängden av följder som innehåller 01” även kan innehålla $9X$ och vice versa. Använd PIE för att räkna bort dessa och få det unika antalet.	Mängden av följder som innehåller 01 och/eller $9X$ är lika med $A_1 \cup A_2$ och enligt PIE har vi att $\|A_1 \cup A_2\| = \|A_1\| + \|A_2\| - \|A_1 \cap A_2\|$
Vad blir $\|A_1\|$?	Man kan betrakta A_1 som mängden $\{01,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ *(där 0 och 1 har ersatts av den kombinerade symbolen 01, så att den garanterat förekommer. I denna mängd finns nu 10 symboler)* Enligt tidigare resonemang kan vi placera vilken som helst av våra 10 symboler på plats 1, 9 symboler på plats 2, 8 symboler på plats 3 osv. Multiplikationsprincipen ger $10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ sätt
Vad blir $\|A_2\|$?	Man kan betrakta A_2 som mängden $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9X\}$ *(där 9 och X har ersatts av den kombinerade symbolen $9X$, så att den garanterat förekommer. I denna mängd finns nu 10 symboler)* Enligt samma resonemang som ovan ger multiplikationsprincipen $10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ sätt
Vad blir $\|A_1 \cap A_2\|$?	Man kan betrakta $A_1 \cap A_2$ som mängden $\{01,2,3,4,5,6,7,8,9X\}$ *(där 0 och 1 samt 9 och X har ersatts av 01 respektive $9X$, så att de garanterat förekommer. I denna mängd finns nu 9 symboler)* Enligt samma resonemang som ovan ger multiplikationsprincipen $9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 9!$ sätt
Sammanställ resultaten från PIE	Mängden av följder som innehåller 01 och/eller $9X$ $= 10! + 10! - 9!$
”Mönstret innehåller inte 01 eller $9X$” = Alla möjliga permutationer – Permutationer som innehåller 01 eller $9X$	$= 11! - (10! + 10! - 9!)$

Talteori

Begrepp	Betydelse	Exempel
$a \mid b$	a delar b $\Leftrightarrow$ Det finns ett heltal k så att $b = k \cdot a$ $\Leftrightarrow$ b är en multipel av a	$12 \mid 48$ eftersom $48 = 4 \cdot 12$
Primtal	Ett tal ≥ 2 som enbart delas av 1 och sig självt	$3, 5, 7, 11, \ldots$
Sammansatt tal	Ett tal ≥ 2 som inte är ett primtal *Det är dock "sammansatt" av flera primtal*	$21 = 3 \cdot 7$ 3 *och* 7 *är båda primtal men 21 inte är det*
$sgd(a, b)$	Största gemensamma delare för a och b *Den största heltalsfaktor som* a *och* b *båda innehåller*	$sgd(30,21) = 3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $21 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ *Gemensamma heltalsfaktorer/delare:* $2, 3$ *Största gemensamma delare:* 3
$mgm(a, b)$	Minsta gemensamma multipel till a och b *Minsta talet som delas av både* a *och* b	$mgm(8,10) = 40$ eftersom 40 är det minsta tal som delas av både 8 och 10

Användbara satser

Förutsättningar	Resultat
$c \mid a$ (c delar a) $c \mid b$ (c delar b)	$c \mid (ax + by)$ för alla heltal x och y $ax + by$ *kallas för en linjärkombination*
a och b är två heltal Minst ett av a och b är skilt från 0	Det finns två heltal x och y så att: $sgd(a, b) = ax + by$ *Exempel*: $7 = sgd(21,70) = 21 \cdot (-3) + 70 \cdot 1$

Divisionsalgoritmen

Om a och d är två heltal (med $d > 0$)
$\Rightarrow$ Det finns entydigt bestämda heltal k *(kvot)* och r *(rest)* så att $a = k \cdot d + r$ och $0 \leq r < d$

Exempel: Låt $a = -16$ och $d = 5 \Rightarrow$ Det finns entydigt bestämda heltal k och r så att $-16 = k \cdot 5 + r$.

- Börja med att behandla fallet 16. Vi har att $16 = 3 \cdot 5 + 1$.
- Alltså måste $-16 = -(3 \cdot 5 + 1) = -3 \cdot 5 - 1$
- "Problemet" är att vi just nu har $r = -1$ men vi söker $0 \leq r < d$
- Lägg till multiplar av $a = 5$ till att $r \geq 0$.
- Dra sedan bort lika många multiplar.
- Vi får nu $-16 = -3 \cdot 5 - 5 + 5 - 1$
- Notera att $-16 = -3 \cdot 5 - 5 + 5 - 1 \Leftrightarrow -16 = -4 \cdot 5 + 4$, där $r = 4 \geq 0$.
- Vi har nu resultatet: $-16 = -4 \cdot 5 + 4 \Leftrightarrow$ När -16 delas med 5 fås kvoten $k = 4$ och resten $r = 4$

Euklides algoritm

Euklides algoritm används ofta vid beräkning av $sgd(a, b)$ och vid lösning av diofantiska ekvationer.

Exempel: Bestäm $sgd(a, b) = sgd(\mathbf{516}, \mathbf{996})$

1. $\mathbf{996} = 1 * \mathbf{516} + (996 - 1 * 516) = 1 * \mathbf{516} + \mathbf{480}$
2. $\mathbf{516} = 1 * \mathbf{480} + (516 - 1 * 480) = 1 * \mathbf{480} + \mathbf{36}$
3. $\mathbf{480} = 13 * \mathbf{36} + (480 - 13 * 36) = 13 * \mathbf{36} + \mathbf{12}$
4. $\mathbf{36} = 3 * \mathbf{12} + (36 - 3 * 12) = 3 * \mathbf{12} + 0$ ← ALGORITMEN AVSLUTAS
5. $\mathbf{12} = \text{sgd}(516{,}996)$

Om $sgd(a, b) = 1, b \neq 0$ säges a och b vara relativt prima.

Exempel: Bestäm $sgd(a, b) = sgd(\mathbf{97}, \mathbf{217})$

1. $\mathbf{217} = 2 * \mathbf{97} + (217 - 2 * 97) = 2 * \mathbf{97} + \mathbf{23}$
2. $\mathbf{97} = 4 * \mathbf{23} + (97 - 4 * 23) = 4 * \mathbf{23} + \mathbf{5}$
3. $\mathbf{23} = 4 * \mathbf{5} + (23 - 4 * 5) = 4 * \mathbf{5} + \mathbf{3}$
4. $\mathbf{5} = 1 * \mathbf{3} + (5 - 1 * 3) = 1 * \mathbf{3} + \mathbf{2}$
5. $\mathbf{3} = 1 * \mathbf{2} + (3 - 1 * 2) = 1 * \mathbf{2} + \mathbf{1}$
6. $\mathbf{2} = 2 * \mathbf{1} + (2 - 2 * 1) = 2 * \mathbf{1} + 0$ ← ALGORITMEN AVSLUTAS
7. $\mathbf{1} = \text{sgd}(97, 217)$

Diofantiska ekvationer

Denna typ av ekvationer karaktäriseras av att de endast tillåter heltalslösningar och ser ut som följande:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c, x_k \in \mathrm{Z}$$

Ekvationen har lösningar endast då $sgd(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid c$

I specialfallet då $\boldsymbol{n = 2}$ gäller föjande användbara sats:

Låt $a, b, c \in \mathrm{Z}$ och $a, b \neq 0$. Antag att $sgd(a,b) = 1$. Om $(x_{0,}y_0)$ är en lösning till den diofantiska ekvationen

$$ax + by = c$$

så ges samtliga lösningar av: $x = x_0 + bn, y = y_0 - an, n \in \mathrm{Z}$

TENTA 2013-06-01 uppgift 2a: Till en konferens handlar matematiska institutionen bakelser av två typer: dyrare och billigare. Varje bakelse kostar 42 eller 30 SEK. Hur många bakelser köpte man av varje typ om man betalade totalt 2706 SEK?

Svar: Vi antar rimligtvis att MAI köper hela bakelser och ett större antal än 0. Sätt x = dyra bakelser, y = billiga bakelser. Detta leder till följande diofantiska ekvation: $42x + 30y = 2706$.

1. Börja med att med hjälp av Euklides Algoritm bestämma $sgd(30,42)$
   $42 = 1 * 30 + (42 - 1 * 30) = 1 * \mathbf{30} + \mathbf{12}$
   $\mathbf{30} = 2 * \mathbf{12} + (30 - 2 * 12) = 2 * \mathbf{12} + \mathbf{6}$
   $\mathbf{12} = 2 * \mathbf{6} + (12 - 2 * 6) = 2 * 6 + 0$ ALGORITMEN AVSLUTAS
   $\text{sgd}(30,42) = 6$

2. Nästa steg är att kontrollera att ekvationen har lösningar. Detta görs genom att analysera om

   $$sgd(a_1, a_2)|c \Rightarrow sgd(30,42))|2706 \Leftrightarrow 6|2706$$

   Eftersom $\frac{2706}{6} = 451$ så har ekvationen lösningar.

3. Dividera båda leden av ursprungsekvationen med $sgd(30,42) = 6$

   $$\frac{42x + 30y}{6} = \frac{2706}{6} \Leftrightarrow 7x + 5y = 451 = c_{ny}$$

   Vi skriver därefter $1 = sgd(5,7)$ som en linjärkombination av 5 och 7. För att kunna göra detta applicerar vi *Euklides Algoritm.*

   a) $7 = 1 * 5 + (7 - 1 * 5) = 1 * 5 + 2$
   b) $5 = 2 * 2 + (5 - 2 * 2) = 2 * 2 + 1$
   c) $2 = 2 * 1 + (2 - 2 * 1) = 2 * 1 + 0 \leftarrow$ ALGORITMEN AVSLUTAS

4. Utför *Euklides Algoritm Baklänges*. Börja från b) i 3.

   $$\mathbf{1} = 5 - 2 * 2 = 5 - 2 * (7 - 1 * 5) = \mathbf{3 * 5 - 2 * 7}$$

5. Multiplicera **VL** och **HL** med 451 för att få tillbaka $c_{ny} = 451$ i **VL**

   $$\mathbf{1} * 451 = (\mathbf{3} * 5 - \mathbf{2} * 7) * \mathbf{451} = 1353 * 5 - 902 * 7$$

6. För att få endast positiva lösningar måste
   a) $5n - 902 \geq 0 \leftrightarrow n \geq \frac{902}{5} = \lceil 180.4 \rceil = 181$ **OBS!** Runda upp ty annars $x < 0$
   b) $1353 - 7n \geq 0 \leftrightarrow n \leq \frac{1353}{7} = \lfloor 193.3 \rfloor = 193$ **OBS!** Runda ner ty annars $y < 0$

7. Samtliga positiva heltalslösningar ges av:
   $x = -902 + 5n, y = 1353 - 7n, \quad \text{där } 181 \leq n \leq 193, n \in \mathbb{Z}$

Modulär aritmetik

Detta område behandlar *kongruensräkning* eller *moduloräkning* som bygger på den matematiska operationen division. Två tal a och b sägs vara *kongruenta* modulo n om och endast om talet n delar differensen mellan a och b, $a \equiv b \; mod \; n \; \Leftrightarrow (a-b)|n$.

Användbara egenskaper

$a \equiv b \bmod n$ x är ett positivt heltal	$ax \equiv bx \bmod n$
$a \equiv b \bmod n$ x är ett positivt heltal	$a^x \equiv b^x \bmod n$ *Modulo bevaras vid exponentiering*
p primtal a, b heltal	$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \bmod p$

Fermats lilla sats

p primtal a är ett heltal ej delbart med p	$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ $\Leftrightarrow (a^{p-1} - 1)$ är delbart med p

Beräkning av multiplikativ invers

Definition: varje lösning x till kongruensekvationen $ax \equiv 1 \; mod \; n$	Anta att vi har $25x \equiv 1 \; mod \; 11$
Använd Euklides algoritm framlänges	$25 = 2 * 11 + 3$ $11 = 3 * 3 + 2$ $3 = 1 * 2 + 1$ $1 = 1 * 1 + 0$ ← ALGORITMEN AVSLUTAS
Använd Euklides algoritm baklänges Målet är att återföra "1:an" till en linjärkombination som består av $25a + 11b$ där $11b$-termen kommer att bli kongruent med $0 \; mod \; 11$. Jämför sedan x med a.	$1 = 3 - 1 * 2$ $1 = 3 - 1 * (11 - 3 * 3) = 4 * 3 - 1 * 11$ $1 = 4 * (25 - 2 * 11) - 1 * 11 = 4 * 25 - 9 * 11$ $\Rightarrow 4 * 25 - 9 * 11 = 1$ $\Rightarrow 4 * 25 \equiv 1 \; mod \; 11$ (eftersom $-9 * 11 \equiv 0 \; mod \; 11$) Jämför $\begin{cases} 25x \equiv 1 \; mod \; 11 \\ 4 * 25 \equiv 1 \; mod \; 11 \end{cases} \Rightarrow x = 4$
Samtliga lösningar ges av	$x \equiv 4 \; mod \; 11$

Kinesiska restsatsen (KRS)

Kinesiska restsatsen är väldigt användbar vid lösning av kongruensekvationer och ser ut enligt följande.

$$\begin{aligned} x &\equiv b_1 \; mod \; n_1 \\ x &\equiv b_2 \; mod \; n_2 \\ &\vdots \\ x &\equiv b_k \; mod \; n_k \end{aligned}$$

där $b_1, .. b_n$ är givna heltal och $sgd(n_i, n_j) = 1$ $då\ i \neq j$.

ALGORITM FÖR KRS

- Bilda talen $N = n_1, n_2, \ldots, n_k$ och $N_i = \frac{N}{n_i}, i = 1, 2, \ldots, k$.
- Låt vidare x_i vara en multiplikativ invers till $N_i \; mod \; n_i$ d.v.s $N_i x_i \equiv 1 \; mod \; n_i, i = 1,2, \ldots, k$.
- Då är $x = \sum_{i=1}^{k} b_i N_i x_i$ en lösning till systemet.
- Lösningen är dessutom entydigt bestämd vilket innebär att om x och x' är två lösningar så är $x \equiv x' \; mod \; N$.

TENTA 2014-06-04 uppgift 3a: Hitta heltalet som ligger mellan 75 och 100 och är kongruent med $19^{23} - 2^{23} - 13^{23}$ mod 23

Vi ser att primtalet 23 förekommer som exponent och "kongruent modulo 23"	$\Rightarrow$ Använd Fermats lilla sats
Dela upp räkningarna i tre delar och applicera Fermats lilla sats på varje del	(a) 19^{23} mod $23 \Leftrightarrow 19(19^{23-1})$ mod $23 \equiv 19 * 1$ mod 23 (b) 2^{23} mod $23 \Leftrightarrow 2(2^{23-1})$ mod $23 \equiv 2 * 1$ mod 23 (c) 13^{23} mod $23 \Leftrightarrow 13(13^{23-1})$ mod $23 \equiv 13 * 1$ mod 23
Utför sedan subtraktionen (a)-(b)-(c)	$19 - 2 - 13 \equiv 4$ mod 23
Talet vi söker ska alltså vara kongruent med 4 modulo 23	Detta kan skrivas som $23x + 4$
Samtidigt ska talet ligga mellan $75 \leq 23x + 4 \leq 100$	Detta ger $71 \leq 23x \leq 96 \Rightarrow x = 4$ och $\Rightarrow$ Talet blir $23 * 4 + 4 = 96$

TENTA 2015-08-20 uppgift 6: Hitta det minsta positiva heltalet x som uppfyller ekvationerna

$$(1)\ x^2 + x \equiv 1 \; mod \; 5$$
$$(2)\ x^2 + x \equiv 5 \; mod \; 7$$
$$(3)\ x^2 + x = 3 \; mod \; 13$$

Börja med att gissa lösningar till respektive ekvation	(1) $x = 2$, ty $2^2 + 2 = 6 \equiv 1 \; mod \; 5$ (2) $x = 3$, ty $3^2 + 3 = 12 \equiv 5 \; mod \; 7$ (3) $x = 6$, ty $6^2 + 6 = 42 \equiv 3 \; mod \; 13$
Detta blir nu ett linjärt system av kongruensekvationer	(1) $x \equiv 2 \; mod \; 5$ (2) $x \equiv 3 \; mod \; 7$ (3) $x \equiv 6 \; mod \; 13$
Systemet kan lösas med hjälp av KRS	Se exempel nedan: TENTA 2014-08-21 uppgift 4

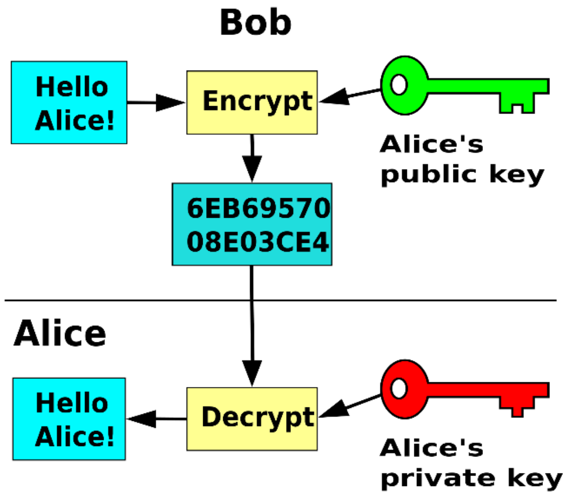
TENTA 2014-08-21 uppgift 4: För att hitta ett hemligt tal mellan 1 och 200 löser vi följande system av kongruensekvationer. Vilket är det hemliga talet? Har vi hittat det egentligen?

$$1)\ 3x \equiv 1 \ mod\ 11$$
$$2)\ 4x \equiv 3 \ mod\ 13$$

Försök få enbart x i vänsterleden. Börja med att beräkna multiplikativ invers. Använd *Euklides Algoritm* på ekvation 1.	$11 = 3 * 3 + 2$ $3 = 1 * 2 + 1$ $2 = 2 * 1 + 0 \leftarrow$ ALGORITMEN AVSLUTAS
Använd nu Euklides algoritm baklänges på ekvation 1	$1 = 3 - 1 * 2$ $= 3 - 1(11 - 3 * 3)$ $= 3 - 11 + 3 * 3$ $= 3 * 4 - 11 \Leftrightarrow 3 * 4 - 11 = 1$
Beräkning av multiplikativ invers för ekvation 1.	$3 * 4 - 11 = 1$ $\Rightarrow 3 * 4 \ \equiv 1 \ mod\ 11$ Jämför $\begin{cases} 3x \equiv 1 \ mod\ 11 \\ 3 * 4 \equiv 1 \ mod\ 11 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x \equiv 4 \ mod\ 11$
Eftersom ekvation 2 inte är på formen $ax \equiv 1 \ mod\ n$ måste vi utföra ett hjälpsteg innan vi kan beräkna x	Använd Euklides algoritm på hjälpekvationen $4t \equiv 1 \ mod\ 13$ $13 = 4 * 3 + 1$ $3 = 3 * 1 + 0 \leftarrow$ ALGORITMEN AVSLUTAS
Använd nu Euklides algoritm baklänges på hjälpekvationen	$1 = 13 - 4 * 3 \Leftrightarrow 13 - 4 * 3 = 1$
Beräkning av multiplikativ invers t för hjälpekvation	$13 - 4 * 3 = 1 \Rightarrow 4 * (-3) \ \equiv 1 \ mod\ 13$ Jämför $\begin{cases} 4t \equiv 1 \ mod\ 13 \\ 4(-3) \equiv 1 \ mod\ 13 \end{cases} \Rightarrow t = -3 \Rightarrow t \equiv -3 \ mod\ 13$
Multiplicera VL och HL i ekvation 2 med multiplikativa inversen för hjälpekvationen. Nu fås x ensamt på en sida, vilket vi ville ha.	$4x \equiv 3 \ mod\ 13 \Rightarrow 4 * x * (-3) \equiv 3 * (-3) \ mod\ 13$ Eftersom $4 * (-3) \ \equiv 1 \ mod\ 13$ så blir $VL = 1 * x$. Vi får: $x \equiv -9 \ mod\ 13 \equiv 4 \ mod\ 13$ *Notera att resten inte bör vara negativ. Addera därför multiplar av 13 (vilket bevarar modulo) till resten blir positiv.*
Vi har nu ett ekvationssystem: $\begin{cases} x \equiv 4 \ mod\ 11 \\ x \equiv 4 \ mod\ 13 \end{cases}$ För att få fram den slutgiltiga lösningen använder vi kinesiska restsatsen.	$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} n_1 = 11 \\ n_2 = 13 \end{cases}$, $N = n_1 * n_2 = 11 * 13 = 143$ $\begin{cases} N_1 = \frac{143}{11} = 13 \\ N_2 = \frac{143}{13} = 11 \end{cases}$
Utför beräkningen av multiplikativ invers $(N_i x_i \equiv 1 \ mod\ n_i)$	$N_1 x_1 \ \equiv 1 \ mod\ n_1 \Rightarrow 13x_1 \equiv 1 \ mod\ 11$ $N_2 x_2 \ \equiv 1 \ mod\ n_2 \Rightarrow 11x_1 \equiv 1 \ mod\ 13$ Använd Euklides framlänges/baklänges på respektive x_1, x_2
$x = \sum_{i=1}^{k} b_i N_i x_i$	$x = 4 * 13 * 6 + 4 * 11 * 6 = 312 + 264 = 576$
$x \equiv x' mod\ N$	$x \equiv x' \ mod\ 143 \ \Rightarrow 576 \equiv x' \ mod\ 143$ $\frac{576}{143} = 4 * 143 + 4 \Rightarrow x' \equiv 4 \ mod\ 143 \Rightarrow$ $x = 4 + 143 * n, \ \ n \in Z$ Då vi har kravet att $1 \leq x \leq 200$ finns två lösningar: $x = 4$ och $x = 147$

Public Key Cryptography & RSA

Public Key Crypto bygger på att varje entitet i en mängd av entiteter har två krypteringsnycklar, en offentlig och en privat. Den publika nyckeln används till att kryptera meddelanden och finns tillgänglig för alla, därav namnet offentlig nyckel. Den privata nyckeln används till att dekryptera och signera meddelanden och måste hållas hemlig, därav namnet privat nyckel.



RSA

RSA är en algoritm som faller inom ramen för Public Key Cryptography och bygger på primtalteori samt faktorisering. Stegen i algoritmen ser ut enligt följande:

- Välj 2 stora primtal p och q (Givna på tentan)
- Sätt $n = p * q$ och $m = (p-1)(q-1)$
- Välj offentlig nyckel k, där $0 < k < m$ och $sgd(k, m) = 1$
- Sätt den privata nyckeln a (där $0 < a < m$) till den multiplikativa inversen: $a * k \equiv 1 \ mod \ m$
- Kryptera ett meddelande x: $K(x) = x^k \ mod \ n$
- Signera ett meddelande x: $S(x) = x^a \ mod \ n$
- Dekryptera ett meddelande y: $A(y) = y^a \ mod \ n$

TENTA 2015-06-04 uppgift 5: RS-klubben använder ett RSA-kryptosystem till passerkort som medlemmar får. I datorn som sköter dörrarna har man matat in den offentliga nyckeln $(n, k) = (5063, 1001)$. Vilken nyckel är programmerad i medlemmarnas kort?

Svar: Det rör sig om RSA och alltså är det bara att följa stegen i algoritmen.

1) Vi börjar med att primtalsfaktorisera n: $n = 5063 = 61 * 83 = p * q$
2) Vi kan nu beräkna m: $m = (p-1)(q-1) = (61-1)(83-1) = 4920$
3) Den publika nyckeln k är given: $k = 1001$
4) Vi tar reda på den privata nyckeln a (med hjälp av multiplikativ invers):
   $1001a \equiv 1 \ mod \ 4920 \rightarrow Euklides \ Algoritm \ (fram/bak) \rightarrow a = 521$

Rekursiva följder och differensekvationer

En talföljd sägs vara definierad rekursivt om talen i följden inte är explicit definierade ($a_3 = 7$) utan istället anges genom en formel för hur talet a_n kan beräknas från de föregående talen i följden ($a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$).

Generell lösningsgång

1) Dela upp i homogen lösning $a_n^{(h)}$ och partikulärlösning $a_n^{(p)}$
2) Bestäm homogen lösning via karakteristisk ekvation
3) Bestäm partikuläransats beroende på karakteristisk ekvation och funktion i högerledet
4) Bestäm partikulärlösning med hjälp av partikuläransats
5) Använd givna begynnelsevärden för att lösa ut den homogena lösningens koefficienter
6) Slå samman homogen lösning och partikulärlösning för att få slutgiltigt svar

Antag att vi har en generell ekvation på formen $a_{n+4} + Ba_{n+2} - Ca_{n+1} + Da_n = (E + Fn) \cdot 3^n$. Inför följande begrepp som ska användas senare.

Begrepp	Betydelse	Exempel
Homogen ekvation	”Vänsterledet = 0”	$a_{n+4} + Ba_{n+2} - Ca_{n+1} + Da_n = 0$
Funktion	Högerledet ska vara en funktion som uteslutande beror av n (och inte a_n!)	$f(n) = (E + Fn) \cdot 3^n$
Polynom-del	Ett polynom i n (i detta fall av grad 1)	$p(n) = E + Fn$
Exponent-del	Valfri konstant^n funkar (här valdes 3)	$(S)^n = 3^n$

Homogen lösning

Vad är den homogena ekvationen?	$a_{n+4} + Ba_{n+2} - Ca_{n+1} + Da_n = 0$
Ta fram motsvarande karakteristisk ekvation	$r^4 + Br^2 - Cr^1 + Dr^0 = 0$ $\Leftrightarrow\ r^4 + Br^2 - Cr + D = 0$
Vad är mönstret?	a_{n+x} i homogen ekvation $\Rightarrow r^x$ i karakteristisk ekvation Speciellt gäller att $a_{n+0} = a_n$ med motsvarande $r^0 = 1$.
Vad blir mönstret vid ”omvänd ordning”, t.ex. $a_n - Ba_{n-1} + Ca_{n-4} = 0$?	Logiken bakom det kan informellt ses som ett variabelbyte där lägsta graden ($n - 4$) ersätts med $t = n - 4 \Rightarrow\ a_n = a_{t+4}$ och $a_{n-1} = a_{t+3}$ osv. Detta ger $a_{t+4} - Ba_{t+3} + Ca_t = 0$ vilket ger KE: $r^4 - Br^3 + C = 0$
Ta fram lösningar samt tillhörande multiplicitet till karakteristisk ekvation. Inför även beteckningen $m_i =$ rotens multiplicitet *(Används enbart för att tydliggöra senare beräkning)*	Antag att vi får följande tre lösningar/rötter: $r^4 + Br^2 - Cr + D = 0$ $\Leftrightarrow (r-1)^2(r-2)(r-4)^3 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \text{ med multiplicitet } m_1 = 2 \\ r_2 = 2 \text{ med multiplicitet } m_2 = 1 \\ r_3 = 4 \text{ med multiplicitet } m_3 = 3 \end{cases}$
”Beräkna” ansatsen $a_n^{(h)}$ som $\sum_{i \text{ st rötter}} (\text{polynom i } n \text{ av grad } (m_i - 1)) \cdot (r_i)^n$	Homogena lösningen blir $a_n^{(h)} = (A_{10} + A_{11} \cdot n)(1)^n + (A_{20})(2)^n + (A_{30} + A_{31} \cdot n + A_{32} \cdot n^2)(4)^n$ *där A_{ij} är godtyckliga konstanter*

Partikuläransats

Vad är funktionen?	$f(n) = (E + Fn) \cdot 3^n$
Dela upp i polynom-del och exponent-del. Identifiera även polynomets grad.	$p(n) = E + Fn$ $\text{grad}(p(n)) = 1$ $(S)^n = 3^n$
OBS! Ta hänsyn till "den osynliga 1:an" som möjlig exponent-del! Se följande exempel.	$f(n) = An^2 + Bn^4 \nRightarrow$ "ingen exponent-del" $f(n) = An^2 + Bn^4 = (An^2 + Bn^4) \cdot 1^n \Rightarrow S = 1$
Undersök $(S)^n$: Är S en rot till den karakteristiska ekvationen (KE), och i så fall med vilken multiplicitet?	**Fall 1**: S är en rot till KE, med multiplicitet m **Fall 2**: S är inte en rot till KE
Använd olika partikuläransatser beroende på om det rör sig om fall 1 eller fall 2.	**Fall 1:** Ansatsen blir $a_n^{(p)} = (polynom) \cdot S^n \cdot n^m$ **Fall 2:** Ansatsen blir $a_n^{(p)} = (polynom) \cdot S^n$ *där* $(polynom)$ *är av* $grad(p(n))$
Exempel enligt ovan. Vi har sedan tidigare att: • KE: $r^4 + Br^2 - Cr + D = 0$ • $p(n) = E + Fn$ • $\text{grad}(p(n)) = 1$ • $(S)^n = 3^n$	Antag att $S = 3$ är en rot till KE med multiplicitet 2 $\Rightarrow$ Det rör sig om Fall 1 $\Rightarrow$ Ansatsen blir $a_n^{(p)} = (polynom) \cdot 3^n \cdot n^2$ $\text{grad}(p(n)) = 1 \Rightarrow$ $(polynom) = (p_0 + p_1 n)$, där p_i *är godtyckliga konstanter* $\therefore$ Partikuläransatsen blir: $a_n^{(p)} = (p_0 + p_1 n) \cdot 3^n \cdot n^2$

Partikulärlösning

<table>
<tr><td>Vad är ekvationen?</td><td>$a_{n+4} + Ba_{n+2} - Ca_{n+1} + Da_n = (E + Fn) \cdot 3^n$</td></tr>
<tr><td>Vad är funktionen?</td><td>$f(n) = (E + Fn) \cdot 3^n$</td></tr>
<tr><td>Vad är partikuläransatsen?</td><td>Antag att $a_n^{(p)} = (p_0 + p_1 n) \cdot 3^n \cdot n^2$</td></tr>
<tr><td>Betrakta a_n som en funktion av n, dvs
$a_{n+x} = a_n(n = n + x) = a_n^p(n = n + x)$
Ersätt alla såna termer i VL.</td><td>$a_{n+4} = a_{n+4}^{(p)} = (p_0 + p_1(n+4)) \cdot 3^{n+4} \cdot (n+4)^2$
$Ba_{n+2} = Ba_{n+2}^{(p)} = B[(p_0 + p_1(n+2)) \cdot 3^{n+2} \cdot (n+2)^2]$
$Ca_{n+1} = Ca_{n+1}^{(p)} = C[(p_0 + p_1(n+1)) \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)^2]$
$Da_n = Da_n^{(p)} = D[(p_0 + p_1 n) \cdot 3^n \cdot n^2]$</td></tr>
<tr><td>• Utveckla parenteserna i VL
• Jämför koefficienter i VL (a_n-termerna) med HL ($f(n)$)
• Detta ger ett ekvationssystem; lös ut värden på de okända konstanterna $p_0, p_1, \ldots$</td><td><table>
<tr><td></td><td>VL</td><td>HL</td><td>Resultat</td></tr>
<tr><td>n^1</td><td>$3^{n+2}(p_0 + p_1)$</td><td>$F \cdot 3^n$</td><td>$p_0 + p_1 = \frac{F}{3^2}$</td></tr>
<tr><td>n^o</td><td>$(p_0 + 9p_1) \cdot 3^n$</td><td>$E \cdot 3^n$</td><td>$p_0 + 9p_1 = E$</td></tr>
</table>
Ekvationssystemet ovan ger $p_0 = \frac{F-E}{8}$ och $p_1 = \frac{9E-F}{72}$.

**OBS: Exempel med påhittade siffror för att illustrera principen.*</td></tr>
</table>

Begynnelsevärden

Vad är ekvationen?	$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \Leftrightarrow$ $a_n = (A_{10} + A_{11} \cdot n)1^n + (A_{20})2^n + (p_0 + p_1 n) \cdot 3^n \cdot n^2$
Notera att…	*A_{ij} är fortfarande okända medan p_i beräknades ovan.*
Vilka begynnelsevärden finns?	Antag att vi får (givet) $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ och $a_2 = 2$.
Betrakta a_n som en funktion av n, dvs $a_n = a_n(n)$. T.ex. gäller att $a_0 = a_n(n = 0)$ medan $a_1 = a_n(n = 1)$ osv. Varje begynnelsevärde ger upphov till en ekvation. Tillsammans bildar dessa ett ekvationssystem som kan användas för att lösa ut de okända konstanterna A_{ij}.	$a_0 = 0$ $\Leftrightarrow (A_{10} + A_{11} \cdot 0)1^0 + (A_{20})2^0 + (p_0 + p_1 \cdot 0) \cdot 3^0 \cdot 0^2 = 0$ $\Leftrightarrow A_{10} + A_{20} = 0$ $a_1 = 1$ $\Leftrightarrow (A_{10} + A_{11} \cdot 1)1^1 + (A_{20})2^1 + (p_0 + p_1 \cdot 1) \cdot 3^1 \cdot 1^2 = 1$ $\Leftrightarrow (A_{10} + A_{11}) + 2A_{20} + 3(p_0 + p_1) = 0$ $a_2 = 2$ $\Leftrightarrow (A_{10} + A_{11} \cdot 2)1^2 + (A_{20})2^2 + (p_0 + p_1 \cdot 2) \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 2$ $\Leftrightarrow (A_{10} + 2A_{11}) + 4A_{20} + 36(p_0 + 2p_1) = 0$ $\begin{cases} A_{10} + A_{20} = 0 \\ (A_{10} + A_{11}) + 2A_{20} + 3(p_0 + p_1) = 1 \\ (A_{10} + 2A_{11}) + 4A_{20} + 36(p_0 + 2p_1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A_{10} = Ap_0 + Bp_1 \\ A_{11} = Cp_0 - Dp_1 \\ A_{20} = Ep_0 \end{cases}$ *(notera att p_0 och p_1 är kända sen tidigare)* $\therefore a_n^{(h)} = (A_{10} + A_{11} n)1^n + (A_{20})2^n$ $= (Ap_0 + Bp_1 + (Cp_0 - Dp_1)n) + (Ep_0)2^n$
Slå samman all information från 'homogen lösning' och 'partikulär lösning' till ett slutgiltigt svar.	$a_n = (Ap_0 + Bp_1 + (Cp_0 - Dp_1)n) + (Ep_0)2^n + (p_0 + p_1 n) \cdot 3^n \cdot n^2$ *där p_0, p_1 är kända konstanter som beräknades i ett tidigare steg och E, F är givna konstanter från frågan.*

Att tänka på

Tentafrågor på detta koncept brukar ofta ha två delar.

Första delen handlar om att ta informationen i frågan och göra om den till en vettig differensekvation. Oftast är det något matematiskt knep, t.ex. omskrivning (2016-08-18), eliminering (2016-06-03) eller variabelbyte (2015-08-20) som ska tas till.

Andra delen handlar om att lösa själva differensekvationen. Detta är betydligt mer straightforward eftersom det följer ovanstående metod. Ibland förekommer enbart denna del, dvs en ekvation är given och ska lösas.

TENTA 2016-08-18 uppgift 4: En följd $\{a_n\}$ uppfyller differensekvationen

$(n-1)(n-2)a_n - 4(n)(n-2)a_{n-1} + 3(n)(n-1)a_{n-2} = (4n+2)(n)(n-1)(n-2), \qquad n \geq 3,$

där $a_1 = 5$ och $a_2 = 16$.

a) Betrakta den nya följden $\{b_n\}$ där $b_n = \frac{a_n}{n}$, för $n \geq 1$. Ange en ekvation med begynnelsevillkor för b_n.

b) Ange en formel för b_n och även för a_n.

Vi söker en ny följd $\{b_n\}$ som är relaterad till $\{a_n\}$ genom att $b_n = \frac{a_n}{n}, n \geq 1$	Ersätt därför alla a_n-termer i originalekvationen med motsvarande b_n-term. Vi har $b_n = \frac{a_n}{n} \Leftrightarrow a_n = n \cdot b_n$ och på samma sätt $a_{n-1} = (n-1) \cdot b_{n-1}$ osv. $(n-1)(n-2)a_n - 4(n)(n-2)a_{n-1} + 3(n)(n-1)a_{n-2}$ blir därför $(n-1)(n-2)nb_n - 4(n)(n-2)(n-1)b_{n-1} + 3(n)(n-1)(n-2)b_{n-2}$
Förenkla ekvationen genom att förkorta bort liknande termer.	Notera att $HL = (4n+2)(n)(n-1)(n-2)$ där termerna $(n)(n-1)(n-2)$ förekommer på båda sidor om likhetstecknet. Eftersom $n \geq 3$ är givet så kan de förkortas bort utan nolldivisions-problem. Nu har vi $b_n - 4b_{n-1} + 3b_{n-2} = 4n+2,\ n \geq 3$, dvs en rekursiv ekvation.
Vi behöver också begynnelsevillkor för b_n. Använd att vi känner till a_1 och a_2.	$a_1 = 5 \Leftrightarrow / \ b_1 = \frac{a_1}{1} \ / \Leftrightarrow b_1 = \frac{5}{1} = 5$ $a_2 = 16 \Leftrightarrow / \ b_2 = \frac{a_2}{2} \ / \Leftrightarrow b_2 = \frac{16}{2} = 8$
Sammanställ all information vi har	$b_n - 4b_{n-1} + 3b_{n-2} = 4n+2, \qquad n \geq 3$ med begynnelsevärden $b_1 = 5$ och $b_2 = 8$

Bestäm homogen lösning via karakteristisk ekvation (KE)	$b_n - 4b_{n-1} + 3b_{n-2} = 4n+2$ $\Rightarrow$ KE: $r^2 - 4r + 3 = 0$ $\Leftrightarrow (r-1)(r-3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \text{ med multiplicitet } m_1 = 1 \\ r_2 = 3 \text{ med multiplicitet } m_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Polynom av grad $m_i - 1$, dvs grad 0 $\Rightarrow b_n^{(h)} = B_1(1)^n + B_2(3)^n$
Bestäm partikuläransats beroende på karakteristisk ekvation och funktion i högerledet	$f(n) = 4n+2 = (4n+2) \cdot 1^n \Rightarrow S = 1$ $S = 1$ är en rot till KE, med multiplicitet 1 $\Rightarrow$ Fall 1: Ansats blir $b_n^{(p)} = \left(\text{polynom av grad}(f(n))\right) \cdot 1^n \cdot n^1$ $\Rightarrow b_n^{(p)} = (B_3 n + B_4)n$
Bestäm partikulärlösning med hjälp av partikuläransats. Sätt in partikuläransats i ekvationen och jämför koefficienter i VL med HL.	$b_n - 4b_{n-1} + 3b_{n-2} = 4n+2$ och $b_n^{(p)} = (B_3 n + B_4)n$ ger att $(B_3 n + B_4)n - 4[(B_3(n-1) + B_4)(n-1)]$ $+3[(B_3(n-2) + B_4)(n-2)] = 4n+2$ $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow n^2(0) + n(-4B_3) + (8B_3 - 2B_4) = 4n+2$

	VL	HL	Resultat
n^1	$-4B_3$	4	$-4B_3 = 4 \Leftrightarrow B_3 = -1$
n^o	$8B_3 - 2B_4$	2	$8B_3 - 2B_4 = 3 \Rightarrow B_4 = -5$

Använd givna begynnelsevärden och "sätt in deras n i ekvationen" för att lösa ut den homogena lösningens koefficienter.	Vi har hittills: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = B_1(1)^n + B_2(3)^n + (-n-5)n$ Begynnelsevärdena $b_1 = 5$ och $b_2 = 8$ ger följande ekvationssystem: $b_1 = 5$ $\Leftrightarrow B_1(1)^1 + B_2(3)^1 + (-1-5)\cdot 1 = 5 \Leftrightarrow B_1 + 3B_2 = 11$ $b_2 = 8$ $\Leftrightarrow B_1(1)^2 + B_2(3)^2 + (-2-5)\cdot 2 = 8 \Leftrightarrow B_1 + 9B_2 = 22$ $\begin{cases} B_1 + 3B_2 = 11 \\ B_1 + 9B_2 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{11}{2} \\ B_2 = \frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow b_n^{(h)} = \frac{11}{2}(1)^n + \frac{11}{6}(3)^n$
Slå samman homogen lösning och partikulärlösning för att få slutgiltigt svar. Även en formel för a_n efterfrågas. Använd $a_n = n \cdot b_n$ enligt ovan.	$b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = \frac{11}{2} + \frac{11}{6}3^n - n^2 - 5n \Rightarrow$ $a_n = n\left(\frac{11}{2} + \frac{11}{6}3^n - n^2 - 5n\right) = \frac{11}{2}n + \frac{11}{6}n \cdot 3^n - n^3 - 5n^2$

TENTA 2016-06-03 uppgift 4: Lös följande system av differensekvationer (där $a_0 = b_0 = 1$):

(1) $a_{n+1} = 2a_n + b_n + n$

(2) $b_{n+1} = a_n + 2b_n + 3n + 1$

Svårt att hantera system av ekvationer. Förenkla! Försök uttrycka b_n i a_n och därefter få en ekvation med endast b_n och n, dvs en differensekvation som vi kan lösa.	Notera att (1) $a_{n+1} = 2a_n + b_n + n \Leftrightarrow a_{n+1} - 2a_n - n = b_n$. Ersätt b_n med detta i (2) så fås: (3) $b_{n+1} = a_n + 2(a_{n+1} - 2a_n - n) + 3n + 1 = 2a_{n+1} - 3a_n + (n+1)$ Genom att betrakta (3) $b_{n+1} = 2a_{n+1} - 3a_n + (n+1)$ som en funktion av n (tänk substitution med $t = n+1$) kan vi få fram: (4) $b_n = 2a_n - 3a_{n-1} + n$ Använd nu (3) och (4) i (2) så fås $2a_{n+1} - 3a_n + (n+1) = a_n + 2(2a_n - 3a_{n-1} + n) + 3n + 1$ $\Leftrightarrow a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 2n.$
Vi behöver också fler begynnelsevillkor för a_n.	Använd att vi känner till $a_0 = b_0 = 1$. $a_{n+1} = 2a_n + b_n + n \Rightarrow a_1 = 2\cdot a_0 + b_0 + 0 \Leftrightarrow a_1 = 2 + 1 = 3$
Sammanställ all information vi har	$a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 2n,$ med begynnelsevärden $a_0 = 1$ och $a_1 = 3$

<table>
<tr><td>Bestäm homogen lösning via karakteristisk ekvation (KE)</td><td>$a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 2n$
$\Rightarrow$ KE: $r^2 - 4r + 3 = 0$
$\Leftrightarrow (r-1)(r-3) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \text{ med multiplicitet } m_1 = 1 \\ r_2 = 3 \text{ med multiplicitet } m_2 = 1 \end{cases}$
$\Rightarrow$ Polynom av grad $m_i - 1$, dvs grad 0
$\Rightarrow a_n^{(h)} = A_1(1)^n + A_2(3)^n$</td></tr>
<tr><td>Bestäm partikuläransats beroende på karakteristisk ekvation och funktion i högerledet</td><td>$f(n) = 2n = 2n \cdot 1^n \Rightarrow S = 1$
$S = 1$ är en rot till KE, med multiplicitet 1
$\Rightarrow$ Fall 1: Ansats blir $a_n^{(p)} = \big(\text{polynom av grad}(f(n))\big) \cdot 1^n \cdot n^1$
$\Rightarrow a_n^{(p)} = (A_3 n + A_4)n$</td></tr>
<tr><td>Bestäm partikulärlösning med hjälp av partikuläransats. Sätt in partikuläransats i ekvationen och jämför koefficienter i VL med HL.</td><td>$a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 2n$ och $a_n^{(p)} = (A_3 n + A_4)n$ ger att
$(A_3(n+1) + A_4)(n+1) - 4(A_3 n + A_4)n$
$+3[(A_3(n-1) + A_4)(n-1)] = 2n$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow n^2(0) + n(-4A_3) + (4A_3 - 2A_4) = 2n$
<table>
<tr><th></th><th>VL</th><th>HL</th><th>Resultat</th></tr>
<tr><td>n^1</td><td>$-4A_3$</td><td>2</td><td>$-4A_3 = 2 \Leftrightarrow A_3 = -\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>n^o</td><td>$4A_3 - 2A_4$</td><td>0</td><td>$4A_3 - 2A_4 = 0 \Rightarrow A_4 = -1$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Använd givna begynnelsevärden och ”sätt in deras n i ekvationen” för att lösa ut den homogena lösningens koefficienter.</td><td>Vi har hittills: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A_1(1)^n + A_2(3)^n + \left(-\frac{n}{2} - 1\right)n$
Begynnelsevärdena $a_0 = 1$ och $a_1 = 3$ ger följande ekvationssystem:

$a_0 = 1$
$\Leftrightarrow A_1(1)^0 + A_2(3)^0 + \left(-\frac{0}{2} - 1\right) \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow A_1 + A_2 = 1$

$a_1 = 3$
$\Leftrightarrow A_1(1)^1 + A_2(3)^1 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow A_1 + 3A_2 = \frac{9}{2}$

$\begin{cases} A_1 + A_2 = 11 \\ A_1 + 3A_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-3}{4} \\ A_2 = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a_n^{(h)} = \frac{-3}{4}(1)^n + \frac{7}{4}(3)^n$</td></tr>
<tr><td>Slå samman homogen lösning och partikulärlösning för att få slutgiltigt svar.

Även en formel för b_n ska tas fram. Använd $b_n = 2a_n - 3a_{n-1} + n$ (ekvation 4 enligt ovan.)</td><td>$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \frac{-3}{4} + \frac{7}{4}3^n - \frac{n^2}{2} - n.$
$b_n = 2a_n - 3a_{n-1} + n \Leftrightarrow b_n = 2\left(\frac{-3}{4} + \frac{7}{4}3^n - \frac{n^2}{2} - n\right) -$
$-3\left(\frac{-3}{4} + \frac{7}{4}3^{n-1} - \frac{(n-1)^2}{2} - (n-1)\right) + n \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b_n = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4}3^n + \frac{n^2}{2} - n$</td></tr>
</table>

2015-10-22 uppgift 3: Lös ekvationen $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$, där $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $n \geq 0$.

<table>
<tr>
<td>Bestäm homogen lösning via karakteristisk ekvation (KE)</td>
<td>

$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$

$\Rightarrow$ KE: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (r-1)(r-2)(r-3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \text{ med multiplicitet } m_1 = 1 \\ r_2 = 2 \text{ med multiplicitet } m_2 = 1 \\ r_3 = 3 \text{ med multiplicitet } m_3 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Polynom av grad $m_i - 1$, dvs grad 0

$\Rightarrow a_n^{(h)} = A_1(1)^n + A_2(2)^n + A_3(3)^n$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Bestäm partikuläransats beroende på karakteristisk ekvation och funktion i högerledet</td>
<td>

$f(n) = 2n = 2n \cdot 1^n \Rightarrow S = 1$

$S = 1$ är en rot till KE, med multiplicitet 1

$\Rightarrow$ Fall 1: Ansats blir $a_n^{(p)} = \big(\text{polynom av grad}(f(n))\big) \cdot 1^n \cdot n^1$

$\Rightarrow a_n^{(p)} = (A_4 n + A_5)n$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Bestäm partikulärlösning med hjälp av partikuläransats. Sätt in partikuläransats i ekvationen och jämför koefficienter i VL med HL.</td>
<td>

$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$ och

$a_n^{(p)} = (A_3 n + A_4)n$ ger att

$(A_4(n+3) + A_5)(n+3) - 6(A_4(n+2) + A_5)(n+2)$

$+11[(A_4(n+1) + A_5)(n+1)] - 6(A_4 n + A_5)n = 3n$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow n^2(0) + n(4A_4) + (-4A_4 + 2A_5) = 2n$

<table>
<tr><th></th><th>VL</th><th>HL</th><th>Resultat</th></tr>
<tr><td>n^1</td><td>$4A_4$</td><td>3</td><td>$4A_4 = 3 \Leftrightarrow A_4 = \frac{3}{4}$</td></tr>
<tr><td>n^o</td><td>$2A_5 - 4A_4$</td><td>0</td><td>$2A_5 - 4A_4 = 0 \Rightarrow A_5 = \frac{3}{2}$</td></tr>
</table>

</td>
</tr>
<tr>
<td>Använd givna begynnelsevärden och ”sätt in deras n i ekvationen” för att lösa ut den homogena lösningens koefficienter.</td>
<td>

Vi har hittills:

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A_1(1)^n + A_2(2)^n + A_3(3)^n + \left(\frac{3}{4}n + \frac{3}{2}\right)n$

Begynnelsevärdena $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ger följande ekvationssystem:

$a_0 = 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_1 + A_2 + A_3 = 1$

$a_1 = 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_1 + 2A_2 + 3A_3 = -\frac{5}{4}$

$a_2 = 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_1 + 4A_2 + 9A_3 = -5$

$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = -\frac{5}{4} \\ A_1 + 4A_2 + 9A_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{29}{8} \\ A_2 = -3 \\ A_3 = \frac{3}{8} \end{cases}$

$\Rightarrow a_n^{(h)} = \frac{29}{8}(1)^n - 3(2)^n + \frac{3}{8}(3)^n$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Kombinera homogen lösning och partikulärlösning till slutgiltigt svar.</td>
<td>

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \frac{29}{8}(1)^n - 3(2)^n + \frac{3}{8}(3)^n + \left(\frac{3}{4}n + \frac{3}{2}\right)n.$

</td>
</tr>
</table>

Induktionsprincipen

Induktionsprincipen handlar om att kunna bevisa att ett visst påstående gäller för alla heltal n (typiskt med n större än ett visst tal n_0) med hjälp av en egenskap hos heltalen, nämligen att de är välordnade. Det betyder att 1 följs av 2, som följs av 3, som följs av $\ldots$, som följs av p, som följs av $p + 1$.

Kan man visa att ett påstående gäller för basfallet (t.ex. $n = 3$) och att påståendet även gäller för $n = p + 1$ (efter att först ha gjort antagandet att det gäller för fallet $n = p$) så säger induktionsprincipen att det gäller för alla tal $n \geq 3$. Med andra ord: om ett påstående gäller för ett visst tal $n = p$ och för $n = p+1$, så gäller det även för $n = (p+1)$ respektive $n = (p+1)+1$ osv.

Formellt

Låt $n \geq n_0$ vara ett heltal och låt P vara ett påstående som är sant för $n = n_0$. Anta P är sant för något $n = p \geq n_0$. Om påståendet även är sant för $n = p + 1$, så är P sant för varje heltal $n \geq n_0$.

Lösningsgång

1) Bevisa att påståendet är sant för basfallet $n = n_0$.
2) Anta att påståendet är sant för ett visst $n = p$, där $p \geq n_0$
3) Bevisa att påståendet är sant även för $n = p + 1$(här får man anta (2) dvs påståendet är sant för $n = p$)

Exempeluppgifter

TENTA 2016-08-18 uppgift 1: Visa att $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n^2+n)^2}{4}$ för alla heltal $n \geq 1$.

Visa att påståendet gäller för basfallet $n = 1$	VL: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n=1} k^3 = 1^3 = 1$, HL: $\frac{(1^2+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$, VL = HL $\Rightarrow$ OK!
Anta att påståendet gäller för ett visst $n = p$ där $p \geq 1$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n=p} k^3 = \frac{(p^2+p)^2}{4} = \frac{p^4+2p^3+p^2}{4} = \frac{p^2(p^2+2p+1)}{4} = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$
Visa att påståendet gäller även för $n = p + 1$ Dela upp summan i två delar: summan av de första p termerna (där vi kan använda påståendet för $n = p$) och summan av den $p + 1$:te termen	VL: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n=p+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n=p} k^3 + \sum_{k=p+1}^{n=p+1} k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3$ HL: $\frac{(p+1)^2\left((p+1)+1\right)^2}{4}$ $= \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$ $= \frac{(p+1)^2(p^2+4p+4)}{4}$ $= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + \frac{(4p+4)(p+1)^2}{4}$ $= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)(p+1)^2$ $= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3$, VL = HL $\Rightarrow$ OK!
Induktionsprincipen	Eftersom påståendet gäller för $n = 1$ och $n = p+1$ (under förutsättning att $n = p$ gäller) så ger induktionsprincipen att påståendet $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n^2+n)^2}{4}$ gäller för alla heltal $n \geq 1$, vilket skulle visas.

TENTA 2015-08-20 uppgift 1: Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$ för alla heltal $n \geq 1$.

Visa att påståendet gäller för basfallet $n = 1$	VL: $\sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{(4-3)(4+1)} = \frac{1}{5}$, HL: $\frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$, VL = HL $\Rightarrow$ OK!
Anta att påståendet gäller för ett visst $n = p$ där $p \geq 1$	$\sum_{k=1}^{n=p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{p}{4p+1}$
Visa att påståendet gäller även för $n = p + 1$ Dela upp summan i två delar: summan av de första p termerna (där vi kan använda påståendet för $n = p$) och summan av den $p + 1$:te termen	VL: $\sum_{k=1}^{n=p+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$ $= \sum_{k=1}^{n=p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \sum_{k=p+1}^{n=p+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$ $= \sum_{k=1}^{n=p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4(p+1)-3)(4(p+1)+1)}$ $= \sum_{k=1}^{n=p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4p+1)(4p+5)}$ $= \frac{p}{4p+1} + \frac{1}{(4p+1)(4p+5)}$ $= \frac{p(4p+5)}{4p+1} + \frac{1}{(4p+1)(4p+5)} = \frac{4p^2+5p+1}{(4p+1)(4p+5)}$ HL: $\frac{p+1}{4(p+1)+1} = \frac{p+1}{4p+5} = \frac{(p+1)(4p+1)}{(4p+5)(4p+1)} = \frac{4p^2+5p+1}{(4p+5)(4p+1)}$, VL = HL $\Rightarrow$ OK!
Induktionsprincipen	Eftersom påståendet gäller för $n = 1$ och $n = p + 1$ (under förutsättning att $n = p$ gäller) så ger induktionsprincipen att påståendet $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$ gäller för alla heltal $n \geq 1$, vilket skulle visas.

TENTA 2016-06-03 uppgift 1: Visa att $13^n - 6^n$ är delbart med 7 för alla heltal $n \geq 0$.

Visa att påståendet gäller för basfallet $n = 0$	$13^0 - 6^0 = 1 - 1 = 0$, 0 är delbart med 7 $\Rightarrow$ OK!
Anta att påståendet gäller för ett visst $n = p$ där $p \geq 0$	$13^p - 6^p$ är delbart med 7 $\Leftrightarrow$ $13^p - 6^p$ är en multipel av 7 $\Leftrightarrow$ $13^p - 6^p = 7 \cdot k$, för något k
Visa att påståendet gäller även för $n = p + 1$	$13^{p+1} - 6^{p+1} =$ $= 13 \cdot 13^p - 6 \cdot 6^p$ $= (6 + 7) \cdot 13^p - 6 \cdot 6^p$ $= 6 \cdot 13^p + 7 \cdot 13^p - 6 \cdot 6^p$ $= 6(13^p - 6^p) + 7 \cdot 13^p$ $= 6 \cdot 7k + 7 \cdot 13^p$ $= 7(6k + 13^p)$, $7(6k + 13^p)$ är delbart med 7 $\Rightarrow$ OK!
Induktionsprincipen	Eftersom påståendet gäller för $n = 0$ och $n = p + 1$ (under förutsättning att $n = p$ gäller) så ger induktionsprincipen att påståendet $13^n - 6^n$ är delbart med 7 gäller för alla heltal $n \geq 0$, vilket skulle visas.

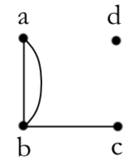
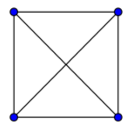
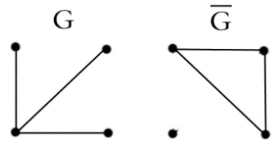
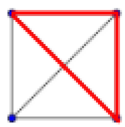
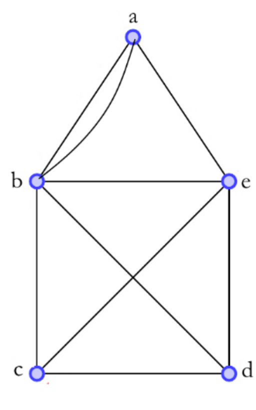
TENTA 2015-06-04 uppgift 1: Visa att $4 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n + 3) = (n + 2)^2$ för alla heltal $n \geq 1$.

Visa att påståendet gäller för basfallet $n = 1$	VL: $4 + 5 = 9$, HL: $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$, VL = HL $\Rightarrow$ OK!
Anta att påståendet gäller för ett visst $n = p$ där $p \geq 1$	$4 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2p + 3) = (p + 2)^2$, $p \geq 1$
Visa att påståendet gäller även för $n = p + 1$	VL: $4 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2p + 3) + (2(p + 1) + 3)$ $= 4 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2p + 3) + (2p + 5)$ $= (p + 2)^2 + (2p + 5)$ $= p^2 + 4p + 4 + 2p + 5 = p^2 + 6p + 9$ HL: $\left((p + 1) + 2\right)^2 = (p + 3)^2 = p^2 + 6p + 9$ VL = HL $\Rightarrow$ OK!
Induktionsprincipen	Eftersom påståendet gäller för $n = 1$ och $n = p + 1$ (under förutsättning att $n = p$ gäller) så ger induktionsprincipen att påståendet $4 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n + 3) = (n + 2)^2$ gäller för alla heltal $n \geq 1$, vilket skulle visas.

Användbara trick

- Summor kan ofta delas upp i två delar: summan av de första p termerna + summan av den $p + 1$: te termen (som bara är den $p + 1$: te termen).
  Detta gör det enklare att återanvända påståendet som gäller för $n = p$, *vid bevis av fallet* $n = p + 1$.
- Även exponenter blir oftare lättare att hantera om man delar upp $p + 1$ i p respektive 1, t.ex. vid $(x + 1)^{p+1} = (x + 1)^p(x + 1)$

Grafteori

Beteckning	Betydelse	Exempel
$V(G)$	Mängden av alla <u>hörn</u> (jämf. ”noder”) till grafen G.	$V(G) = \{a, b, c, d\}$
$E(G)$	Mängden av alla <u>kanter</u> (jämf. ”bågar”) till grafen G.	$E(G) = \{\{a, c\}, \{c, d\}\}$
Enkel graf $G = (V(G), E(G))$	Har högst en kant mellan två olika hörn Har inga kanter där ändpunkterna sammanfaller	
Grannar	Två hörn a och b sägs vara grannar om de förbinds av en kant	
Isolerat hörn	Om ett hörn (d) inte är ändpunkt för någon kant	
Multipla kanter	Två kanter med samma ändpunkt (ab, bc)	
$d_G(v)$ $d(v)$	<u>Gradtal / valens</u>: Talar om hur många kanter som har ett visst hörn v som ändpunkt. Eventuella loopar räknas dubbelt.	$d_G(b) = 3$
(k)-reguljär graf	<u>k-reguljär</u>: Alla hörn har gradtal k En graf G kallas reguljär om den är k-reguljär för något k	
K_n	<u>Fullständig / komplett</u>: Enkel graf där varje par av hörn är förbundna med en kant. Den kompletta grafen med n hörn betecknas K_n.	K_4: 
$\bar{G}$	<u>Komplementet</u> till G är en enkel graf som har samma hörn som G, och dessa hörn ska vara grannar om och endast om de inte är grannar i G.	
Delgraf	En delgraf (G') till en graf G består av en delmängd av dess kanter och hörn. Helt enkelt en mindre graf inuti grafen.	
Väg	Alternerande följd av kanter och hörn (ej nödvändigtvis olika) *Ex*: $a \to b \to a \to c$	
Enkel väg	En väg där alla hörn är olika *Ex*: $a \to b \to c$	
Sluten väg	Starthörn är samma som sluthörn, dvs $v_{k+1} = v_1$ *Ex*: $a \to b \to c \to b \to a$	
Cykel	<u>Cykel av längd k</u>: Enkel och sluten väg $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$ med minst $k \geq 3$ hörn *Ex*: $a \to b \to c \to e \to a$ <u>Cykel av längd 2</u>: Sluten väg $v_1 \to v_2 \to v_1$ med minst två multipla kanter *Ex*: $a \to b \to a$ <u>Cykel av längd 1</u>: Sluten väg $v_1 \to v_1$ (loop) *Ex*: $a \to a$	
Sammanhängande graf	Det finns en enkel väg mellan varje par av hörn i grafen	

Användbara satser

Förutsättningar	Resultat	Förklaring
För alla grafer G gäller att:	$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot \lvert E(G) \rvert$	*"Handskakningslemmat"* En kant har alltid två ändpunkter / hörn (även om dessa kan vara samma, som i en loop) så summan av alla hörns gradtal måste alltså vara dubbelt så stor som antalet kanter.
För alla grafer G gäller att:	Det finns ett jämnt antal hörn med udda gradtal	

Isomorfa grafer

Isomorfi betyder "samma form", så två grafer som är isomorfa har samma struktur i grund och botten. Även om de kan se olika ut vid första anblick och ha olika namn på hörnen så går det alltid att vrida, vända och rotera på dem så att de blir identiska. Notera att dessa operationer bevarar strukturen – man får alltså inte bryta av kopplingar eller skapa nya!

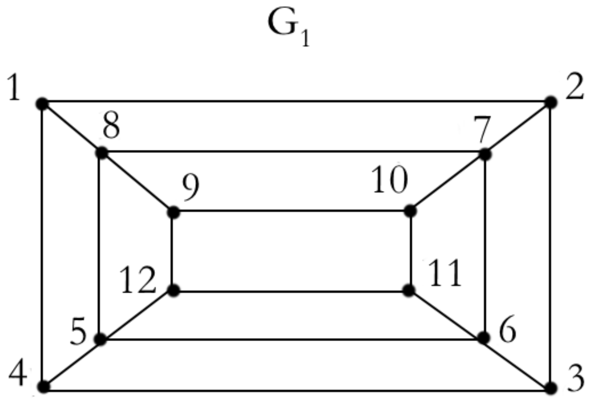
För att visa att G_1 och G_2 är isomorfa så måste man kontrollera två saker:

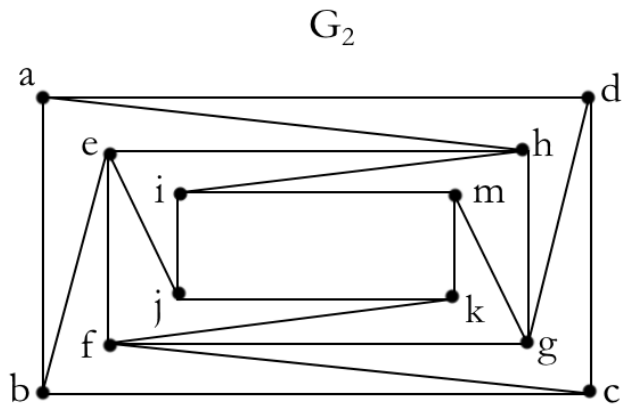
1) För varje kant i G_1 så måste det finnas en motsvarande och matchande kant i G_2.
2) För varje kant i G_2 så måste det finnas en motsvarande och matchande kant i G_1.

Det enkla sättet är att göra följande:

1) Undersök antalet hörn i G_1 och G_2 – de måste vara samma för att graferna ska vara isomorfa!
2) Undersök gradtalet för varje hörn i G_1 och lista dessa i stigande ordning
3) Undersök gradtalet för varje hörn i G_2 och lista dessa i stigande ordning
4) Om listorna är exakt identiska med avseende på både ordning och gradtal för G_1 och G_2 så är graferna isomorfa, annars är de inte isomorfa.
5) Identifiera vilka hörn i G_1 som motsvarar hörnen i G_2, baserat på att de ska ha samma gradtal och att deras grannar ska "matcha" i gradtal.
6) Om det finns flera kandidater för ett hörns motsvarighet kan det bli nödvändigt att utföra rotationer och vridningar av t.ex. G_1 för att få fram en fungerande isomorfi.

TENTA 2015-06-04 uppgift 2a: Är graferna G_1 och G_2 isomorfa?





<table>
<tr><td>Undersök antalet hörn i G_1 och G_2</td><td>G_1 har 12 hörn och G_2 har också 12 hörn ⇒ De kan vara isomorfa.</td></tr>
<tr><td>Undersök gradtalet för varje hörn i G_1 och lista dessa i stigande ordning.

Undersök gradtalet för varje hörn i G_2 och lista dessa i stigande ordning</td><td>
<table>
<tr><th>Hörn G_1</th><th>Hörn G_2</th><th>Gradtal</th></tr>
<tr><td>1</td><td>a</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>b</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>c</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>d</td><td>3</td></tr>
<tr><td>9</td><td>i</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>j</td><td>3</td></tr>
<tr><td>11</td><td>k</td><td>3</td></tr>
<tr><td>12</td><td>m</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>e</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>f</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>g</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>h</td><td>4</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Jämför G_1-listan med G_2-listan</td><td>Listorna är exakt identiska med avseende på både ordning och gradtal för G_1 och G_2 ⇔ graferna är isomorfa.</td></tr>
<tr><td>Identifiera vilka hörn i G_1 som motsvarar hörnen i G_2, baserat på att de ska ha samma gradtal och att deras grannar ska ”matcha” i gradtal.</td><td>$5 \to e$ är en möjlighet men $5 \to f$, $5 \to g$ och $5 \to h$ är också möjliga.
På samma sätt är $6 \to e$, $6 \to f$, $6 \to g$ och $6 \to h$ är också möjliga.</td></tr>
<tr><td>Om det finns flera kandidater för ett hörns motsvarighet kan det bli nödvändigt att utföra rotationer och vridningar av t.ex. G_1 för att få fram en fungerande isomorfi.</td><td>Lägg märke till att om man roterar $efgh$ i G_2 med $90°$ moturs så fås G_1
Det blir därmed lättare att se en isomorfi:

$1 \to a$, $2 \to d$, $3 \to c$, $4 \to b$, $5 \to e$, $6 \to f$, $7 \to g$,
$8 \to h$, $9 \to i$, $10 \to m$, $11 \to k$, $12 \to j$

Notera också att det finns flera tänkbara isomorfier: att rotera $abcd$ och $ijkm$ i G_2 med $90°$ medurs vardera skulle också resultera i G_1 fast med en annan mappning ($1 \to b$, $2 \to a$ etc.)</td></tr>
</table>

Eulergrafer

Namn	Definition
Eulerväg	En väg som passerar varje kant i en (sammanhängande) graf exakt en gång
Eulercykel	En sluten Eulerväg (börjar och slutar på samma hörn)
Eulergraf	En graf som innehåller en Eulercykel (sluten Eulerväg) ”Grafen är Eulersk”

Sats 8.3.2 i Asratian et al. (2014) säger att *om G är en sammanhängande graf i planet med minst en kant, så gäller att:*

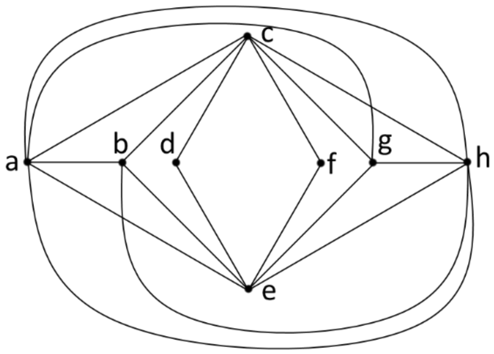
Sluten Eulerväg ⇔ varje hörn i G har jämnt gradtal ⇔ Eulersk graf
Öppen Eulerväg ⇔ exakt två hörn har udda gradtal ⇔ Ej Eulersk graf

Som kuriosa kan nämnas att en öppen eulerväg startar och slutar i hörnen med udda gradtal.

Exempeluppgift 8.12
Går det att forma en 120m lång ståltråd till en kub vars sidor är 10m vardera?

Svar: En kub med sidlängd 10m är förvisso en 3D-form men kan modelleras som en ”sned tillplattad” 2D-form i planet (rita!). Vi ser att varje hörn har det udda gradtalet 3, vilket enligt satsen ovan innebär att det varken finns en sluten eller öppen Eulerväg. Alltså kan man inte på något sätt lägga ståltråden så att den passerar varje kant exakt en gång (dvs konstruera en kub utan att ståltråden överlappar någonstans).

TENTA 2015-06-04 uppgift 2b: Är grafen Eulersk?



Undersök förutsättningar för sats	Är G en sammanhängande graf i planet med minst en kant? Ja. ⇒ Kan använda sats 8.3.2 (varje hörn i G har jämnt gradtal ⇔ Eulersk graf)
Undersök gradtalet för varje hörn i G	$d(a) = 6$, $d(e) = 6$ $d(b) = 4$, $d(f) = 2$ $d(c) = 6$, $d(g) = 4$ $d(d) = 2$, $d(h) = 6$ Alla hörn har jämnt gradtal ⇔ grafen är Eulersk.

Hamiltongrafer

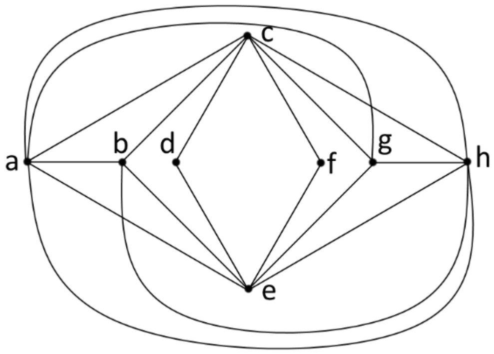
Namn	**Definition**
Hamiltonväg	En enkel väg som innehåller varje hörn i grafen
Hamiltoncykel	Förutsatt att grafen har minst tre hörn: En cykel som innehåller varje hörn i grafen, alt. En sluten väg där varje hörn (förutom start och slut) förekommer exakt en gång.
Hamiltongraf	En graf som innehåller en Hamiltoncykel "Grafen är Hamiltonsk"

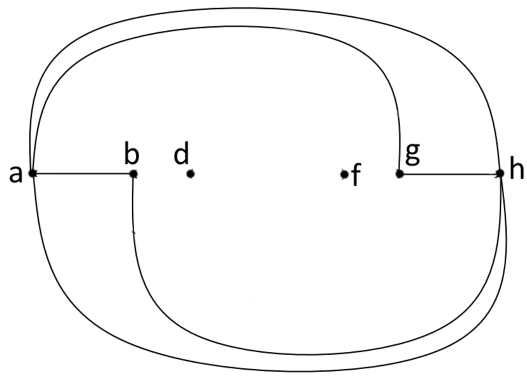
Notera att Eulergrafer berör kanter medan Hamiltongrafer berör hörn. Nedan följer satser för att avgöra om en graf innehåller Hamiltoncykler eller inte ("är Hamiltonsk") och om en graf innehåller Hamiltonvägar.

Användbara satser

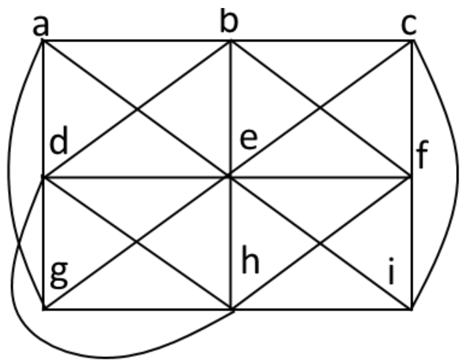
Förutsättningar	**Resultat**
G är en enkel graf Anta att man tar bort $v_1, v_2, \dots, v_k$ (k st) hörn i G samt deras tillhörande kanter	Om den resulterande grafen har minst $k+1$ sammanhängande komponenter $\Rightarrow G$ innehåller inte någon Hamiltoncykel. *Tips: Det är smart att försöka ta bort hörn med höga gradtal, tänk strategiska knytpunkter, för att få loss många komponenter samtidigt.*
G är en enkel graf med $n \geq 3$ hörn.	Om det för alla par av hörn (v_x, v_y) gäller att $d(v_x) + d(v_y) \geq n$ $\Rightarrow G$ innehåller en Hamiltoncykel
G är en enkel graf med $n \geq 3$ hörn.	Om gradtalet för varje hörn i grafen är minst $\frac{n}{2}$ $\Rightarrow G$ innehåller en Hamiltoncykel

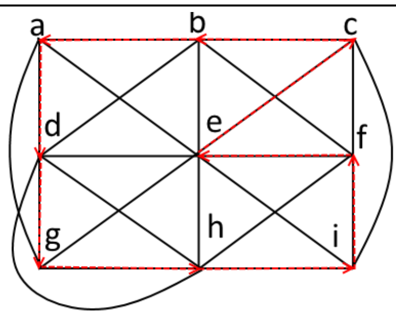
TENTA 2015-06-04 uppgift 2b: Är grafen Hamiltonsk?



Undersök vilka förutsättningar vi har	G är en enkel graf med $n = 8$ hörn. Hörn d och f har enbart gradtal 2 vilket gör att satserna om att påvisa Hamiltoncykler inte biter.
Prova istället att visa på motsatsen, dvs att G inte är Hamiltonsk. Ta bort de $n = 2$ st hörnen c och e, ty de verkar vara de mest centrala knytpunkterna.	 Efter att ha tagit bort 2 hörn får vi 3 sammanhängande komponenter. $3 \geq 2 + 1 \Rightarrow G$ innehåller inte någon Hamiltoncykel. $\Rightarrow G$ är inte Hamiltonsk.

TENTA 2013-08-22 uppgift 2b: Är grafen Hamiltonsk?



Undersök vilka förutsättningar vi har	G är en enkel graf med $n = 9$ hörn. Satserna om att påvisa Hamiltoncykler biter inte. Att försöka bryta ned grafen i sammanhängande komponenter genom att ta bort hörn ger inte heller effekt.
Återstår att manuellt hitta en Hamiltoncykel. En tänkbar Hamiltoncykel är: $a \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow i \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$	 G innehåller en Hamiltoncykel $\Rightarrow G$ är Hamiltonsk.

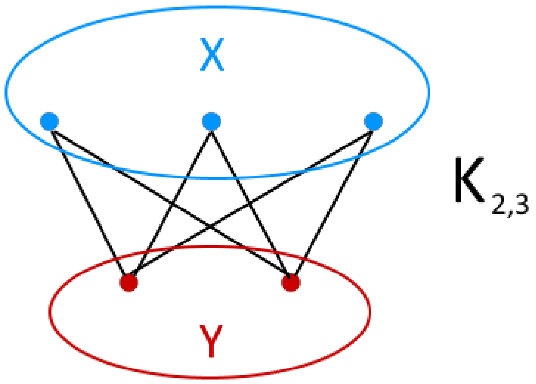
Bipartita grafer

Bipartit betyder ”två delar”, så en bipartit graf ska kunna delas upp i två delar som tillsammans innehåller alla hörn men inte överlappar sinsemellan.

Namn	Definition
Bipartit graf	En graf G kallas bipartit om hörnen i G kan delas upp i två (icke-tomma) mängder X och Y sådana att $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ och varje kant i G har den ena ändpunkten i X och den andra i Y. Alternativ definition: En graf G kallas bipartit om hörnen i G kan ”färgas” på så sätt att varje hörn får en färg medan varje par av hörn som förbinds av en kant får olika färger.
Bipartition	Ett par (X, Y) av mängder i en bipartit graf
Fullständigt bipartit graf	Enkel bipartit graf med bipartition (X, Y) där varje hörn i X är granne med varje hörn i Y. Om $\|X\| = m$ och $\|Y\| = n$ så betecknas grafen $K_{n,m}$.

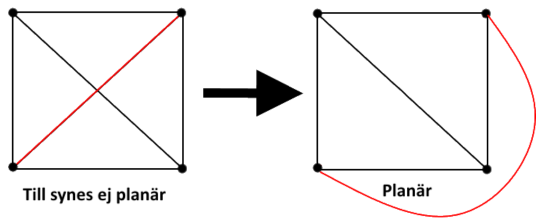
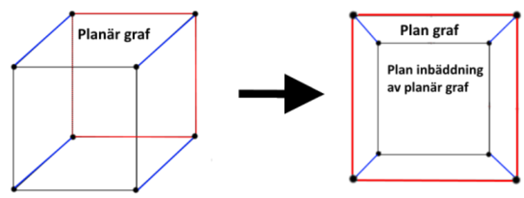
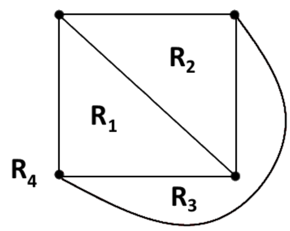
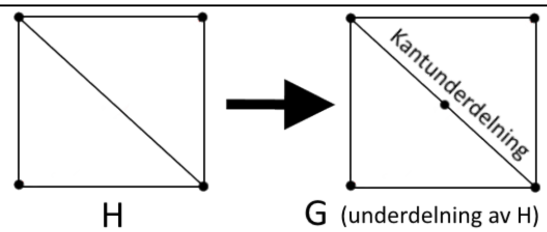
Användbara satser

Förutsättningar	Resultat
N/A	Det finns inga cykler av udda längd $\Leftrightarrow$ Grafen är bipartit



Figur 1 - Den fullständigt bipartita grafen $K_{2,3}$

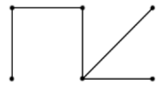
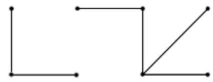
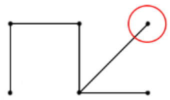
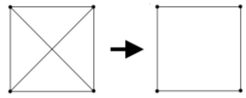
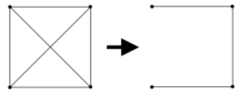
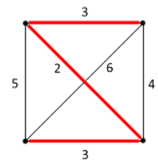
Planära grafer

Namn	Förklaring	Exempel
Planär graf	En graf är planär om den har åtminstone en plan inbäddning där två kanter aldrig skär varandra förutom i hörn. *Grafen kan "plattas ned" i planet på ett sätt så att två kanter aldrig skär varandra förutom i hörn.* *Notera att man även måste ta hänsyn till grafens isomorfier och alternativa (men ekvivalenta) representationer. Se exempel.*	
Plan inbäddning	En geometrisk representation av en graf i planet. *Notera att den plana inbäddningen ska ha samma antal regioner som den planära grafen.*	
Plan graf	En plan inbäddning av en planär graf. *En planär graf kan alltså vara i 3D medan en plan graf är en plan inbäddning av den planära grafen (dvs 2D).*	
Region	Varje plan graf delar planet i regioner som begränsas av kanter. *I exemplet visas de 4 regionerna* R_1, R_2, R_3 *och* R_4.	
Yttre region	Den yttre regionen (R_4 i detta exempel) kan ses som "*resten av planet*" och har oändlig area.	
Kantunderdelning	Ta bort en kant, lägg till ett nytt hörn och anslut detta hörn med två nya kanter.	
Underdelning	En graf G är en underdelning av en graf H om G kan fås från H mha kantunderdelningar	

Användbara satser

Förutsättningar	Resultat
G är en sammanhängande plan graf med v hörn, e kanter och r regioner.	*"Eulers formel"* $v - e + r = 2$
G är en enkel graf med e kanter och $v \geq 3$ hörn	Om $e > 3v - 6$ $\Rightarrow G$ är inte planär
G är en enkel, sammanhängande, bipartit graf med $e \geq 3$ kanter och v hörn	Om $e > 2v - 4$ $\Rightarrow G$ är inte planär
En graf innehåller inte K_5 eller $K_{3,3}$ (eller någon underdelning av dessa) som delgraf.	*"Kuratowskis sats"* En graf innehåller inte K_5 eller $K_{3,3}$ (eller någon underdelning av dessa) som delgraf $\Leftrightarrow$ Grafen är planär

Träd

Namn	Förklaring	Exempel
Träd	Sammanhängande graf utan cykler	
Skog	En graf vars komponenter är träd	
Löv	Hörn med gradtal 1	
Uppspännande delgraf	En delgraf som innehåller alla hörn	
Uppspännande träd	En uppspännande delgraf som är ett träd	
Viktad graf	En graf där varje kant har ett reellt tal tillordnat sig (en s.k. <u>kostnad</u>)	
Minimalt uppspännande träd	Ett uppspännande träd med lägsta möjliga summa av kostnader	

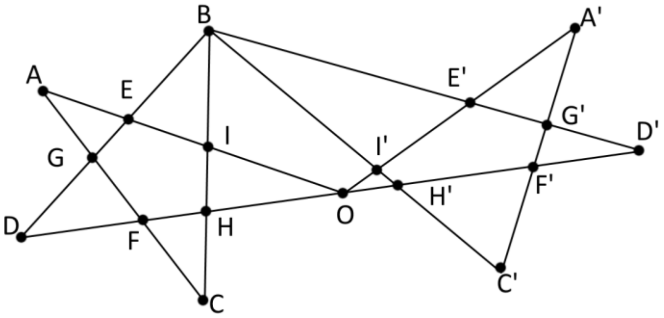
Användbara satser

Förutsättningar	Resultat
Det finns en entydigt bestämd enkel väg mellan varje par av hörn i G	Det finns en entydigt bestämd enkel väg mellan varje par av hörn i G $\Leftrightarrow$ G är ett träd
G är en sammanhängande graf och $\lvert V(G)\rvert = \lvert E(G)\rvert + 1$	G är en sammanhängande graf och $\lvert V(G)\rvert = \lvert E(G)\rvert + 1$ $\Leftrightarrow$ G är ett träd
G saknar cykler och $\lvert V(G)\rvert = \lvert E(G)\rvert + 1$	G saknar cykler och $\lvert V(G)\rvert = \lvert E(G)\rvert + 1$ $\Leftrightarrow$ G är ett träd
G är ett träd	Lägger man till en kant mellan två hörn som inte redan förbinds $\Rightarrow$ precis en cykel uppstår
G är ett träd	Om man tar bort valfri kant i G $\Rightarrow$ G blir osammanhängande
G är en enkel sammanhängande graf	Varje uppspännande träd som produceras av Kruskals algoritm är minimalt.

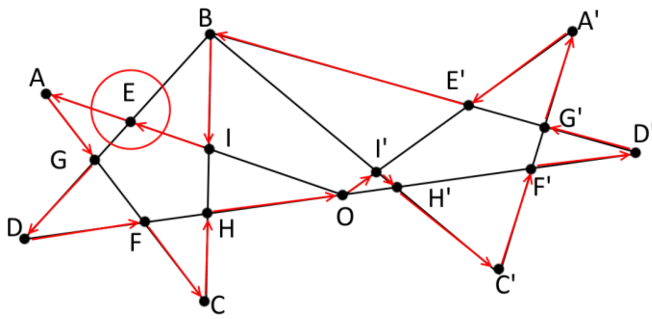
Kruskals algoritm

1) Sätt $i = 1$. Välj en kant i G med minimal kostnad, detta utgör nu en delgraf till G.
2) Utgå ifrån den nuvarande delgrafen. Lägg till en av de återstående kanterna på så sätt att:
   a. Kostnaden är minimal
   b. Delgrafen som innehåller de valda kanterna inte innehåller någon cykel
3) Om $i = n - 2$ så är vi klara. Annars, sätt $i = i + 1$ och gå till steg 2.

TENTA 2016-08-18 uppgift 2: Är grafen Eulersk/Hamiltonsk/bipartit/planär?



Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **Eulersk**	Är G en sammanhängande graf i planet med minst en kant? Ja. $\Rightarrow$ Kan använda sats 8.3.2 (varje hörn i G har jämnt gradtal $\Leftrightarrow$ Eulersk graf)
Undersök gradtalet för varje hörn	Alla hörn har jämnt gradtal $\Leftrightarrow$ Grafen är <u>Eulersk</u>!

Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **Hamiltonsk**	Grafen är en enkel graf med $n = 18$ hörn. Satserna om att påvisa Hamiltoncykler biter inte. Att försöka bryta ned grafen i sammanhängande komponenter genom att ta bort t.ex. B och O ger inte heller effekt.
Återstår att manuellt hitta en Hamiltoncykel. En tänkbar Hamiltoncykel är: $E \to A \to G \to D \to F \to C \to H \to O \to I' \to H' \to C' \to F' \to D' \to G' \to A' \to E' \to B \to I \to E$	 Grafen innehåller en Hamiltoncykel $\Leftrightarrow$ Grafen är <u>Hamiltonsk</u>!

Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **bipartit**	Grafen är bipartit $\Leftrightarrow$ Det finns inga cykler av udda längd.
Undersök vilka cykler som finns och hur långa de är	Det finns ett flertal cykler av längd 3 (udda), t.ex. $A \to G \to E \to A$. Alltså finns minst en cykel av udda längd så grafen är <u>inte bipartit</u>!

Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **planär**	Grafen är en enkel, sammanhängande, bipartit graf med $v = 18$ hörn och $e = 27$ kanter. Satserna om att påvisa att grafen inte är planär biter inte. Kuratowskis sats blir jobbig att använda (även om det säkert går!) Vi har även en geometrisk representation av grafen i planet, dvs en plan inbäddning.
Återstår att använda definitionen av en planär graf.	*"En graf är planär om den har åtminstone en plan inbäddning där två kanter aldrig skär varandra förutom i hörn."* Alla kanter skär varandra enbart i hörn, alltså är grafen <u>planär</u>!

TENTA 2016-06-03 uppgift 2:

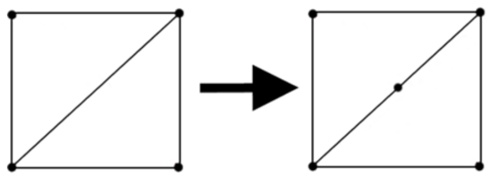
a) En sammanhängande planär graf har endast hörn med gradtal 4. Ange antal regioner i grafen som en funktion av antalet kanter

b) Visa att varje graf med 4 noder är planär

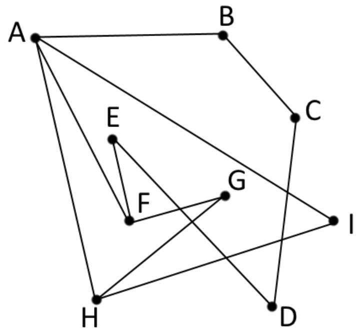
c) Betrakta en graf med 5 noder, varav en av dem har gradtal 2. Visa att grafen är planär.

a) Undersök vilka förutsättningar vi har	Grafen är en sammanhängande och planär graf med v hörn, e kanter och r regioner. Hörnen har alla gradtal 4.
Specificera vad vi söker	Vi söker antalet regioner i grafen (r) som en funktion av antalet kanter (e), dvs $r = r(e)$.
Eftersom vi försöker koppla samman regioner med kanter, verkar Eulers formel vara rätt väg att gå.	Grafen är en sammanhängande och plan graf ⇒ Kan använda Eulers formel: $v - e + r = 2$
e och r är kända från Eulers formel. Vi saknar fortfarande en okänd $v = v(e)$.	Handskakningslemmat gäller för alla grafer: $\sum d(v_i) = 2e$ Vi vet att $d(v_i) = 4$ för alla hörn, och det finns v st hörn ⇒ $4v = 2e$
Lös ut $r = r(e)$.	$\begin{cases} v - e + r = 2 \\ 4v = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \frac{e}{2} - e + r = 2 \Leftrightarrow r(e) = 2 + \frac{e}{2}$

b) Undersök vilka förutsättningar vi har	En graf har 4 noder.
Varje graf med 4 noder måste vara en delgraf till den kompletta grafen K_4	Den kompletta grafen K_4 är planär (se läroboken!) ⇒ Varje delgraf till K_4 är också planär ⇒ Varje graf med 4 noder är planär. VSV.

c) Undersök vilka förutsättningar vi har	En graf har 5 noder, varav en av dem har gradtal 2.
En graf med 5 noder kan konstrueras genom att ta en graf med 4 noder och utföra en kantunderdelning.	
Utnyttja tidigare delresultat	Enligt b) så är alla grafer med 4 noder planära. En kantunderdelning på en planär graf kan alltid göras planärt. ⇒ En graf med 5 noder varav en med gradtal 2, är planär. VSV.

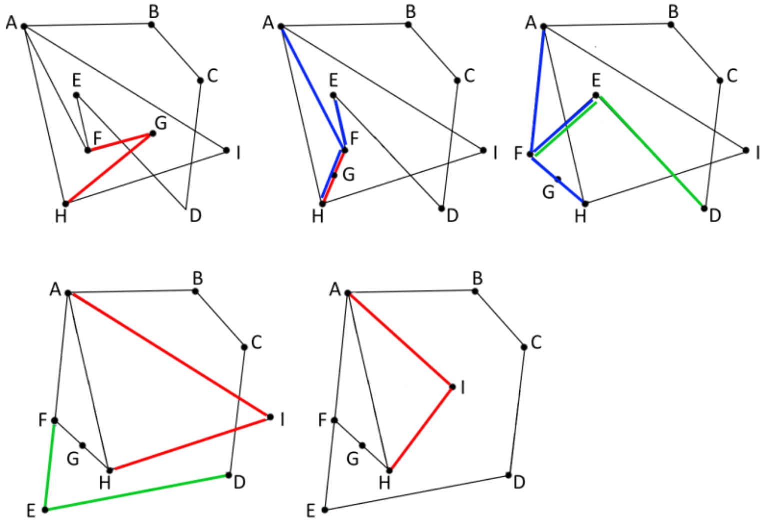
TENTA 2014-10-23 uppgift 4: Är grafen Eulersk/Hamiltonsk/bipartit/planär?



Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **Eulersk**	Är G en sammanhängande graf i planet med minst en kant? Ja. ⇒ Kan använda sats 8.3.2 (varje hörn i G har jämnt gradtal ⇔ Eulersk graf)
Undersök gradtalet för varje hörn	$d(F) = d(H) = 3$ (udda) ⇒ Grafen är inte Eulersk!

Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **Hamiltonsk**	Grafen är en enkel graf med $n = 8$ hörn. Satserna om att påvisa Hamiltoncykler biter inte. Att försöka bryta ned grafen i sammanhängande komponenter genom att ta bort hörn ger inte heller effekt.
Återstår att manuellt hitta en Hamiltoncykel.	En tänkbar Hamiltoncykel är: $B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to I \to A \to B$ Grafen innehåller en Hamiltoncykel ⇔ **Grafen** är Hamiltonsk!

Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **bipartit**	Grafen är bipartit ⇔ Det finns inga cykler av udda längd.
Undersök vilka cykler som finns och hur långa de är	Det finns en cykel av längd 3 (udda): $A \to H \to I \to A$. Alltså är grafen inte bipartit!

Undersök vilka förutsättningar vi har för att påvisa att grafen är **planär**	Grafen är en enkel, sammanhängande graf med $v = 18$ hörn och $e = 27$ kanter.
Återstår att använda definitionen av en planär graf. Vid första åsyn verkar grafen inte vara planär. Men tänk på att betrakta dess isomorfier! Med hjälp av strukturbevarande operationer (vridning, vändning, rotation) så fås följande:	 Grafen är isomorf till denna graf, där alla kanter skär varandra enbart i hörn. Det finns alltså minst *"en plan inbäddning där två kanter aldrig skär varandra förutom i hörn"* ⇒ grafen är planär!