

Sammanfattning TSRT12

13 mars 2017

Innehåll

1	Överföringsfunktion	4
2	Stegsvar, 1:a och 2:a ordningens system	4
2.1	Första ordningens system	4
2.2	2:a ordningens system, poler	5
2.3	Icke min-fas system	6
2.4	Stabilitet och poler	7
2.5	Slutvärdessatsen	7
3	Regulatorstruktur och blockschema	8
3.1	Allmän struktur	8
3.2	Grundläggande struktur	9
3.3	Reglerfel och felkoefficienter	10
4	PID-reglering	10
4.1	P-delen	10
4.2	I-delen	11
4.3	D-delen	11
4.4	Sammanfattning PID	11
5	Rotort	12
6	Nyquistkriteriet, nyquistkurva	13
7	Frekvensbeskrivning (bodediagram)	14
7.1	”Sinus in sinus ut”	14
7.2	Bodediagram	15
7.3	Första ordningens faktorer	16
7.4	Andra ordningens faktorer	17
7.5	Kombinerat bodediagram	19
7.6	Specifikationer i bodediagram	20
7.6.1	Statisk förstärkning	21
7.6.2	Amplitud- och fasmarginal	21
7.7	Bodediagram för slutna systemet	22
7.8	Tidsfördröjning i bodediagram	24
8	Kompensering (lead-lag reglering)	24
8.1	Från krav till specifikationer	24
8.1.1	Krav på snabbhet	24
8.1.2	Krav på stabilitet	24
8.1.3	Krav på felmarginal	24
8.2	P-reglering	25
8.3	Lead-länk	25
8.4	Lag-länk	26

9	Känslighet och robusthet	27
9.1	Modellfel, robusthetskriteriet	27
9.2	Störningskänslighet	28
10	Tillståndsform	28
10.1	Differkvationer till tillståndsform	28
10.2	Från överföringsfunktion till tillståndsform (styrbar kanonisk form)	29
10.3	Från tillståndsform till överföringsfunktion	30
10.4	Poler och nollställen	30
11	Tillståndsåterkoppling	31
11.1	Styrbarhet	31
12	Rekonstruktion av tillstånd	32
12.1	Observerbarhet	32

1 Överföringsfunktion

Alla system i kursen ges i grunden av linjära differentialekvationer på formen

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u$$

Laplace-transformerar man detta får man eftersom $\mathcal{L}\{\frac{d^n y}{dt^n}\} = s^n Y(s)$:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s)$$

Kalla polynomet framför $Y(s)$ för $A(s)$ och det framför $U(s)$ för $B(s)$ så fås:

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) \Leftrightarrow \{G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}\} \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

$G(s)$ kallas för systemets *överföringsfunktion*. Lösningar till $B(s) = 0$ kallas för systemets nollställen, och lösningar till $A(s) = 0$ för systemets poler. $A(s)$ kallas även för systemets *karaktäristiska ekvation*.

2 Stegsvar, 1:a och 2:a ordningens system

Stegsvar kallas den utsignal som fås från systemet då referenssignalen är ett steg, alltså $r(t) = A, t \geq 0$ där A är en konstant. Stegsvaret för olika system säger en hel del om systemets egenskaper.

2.1 Första ordningens system

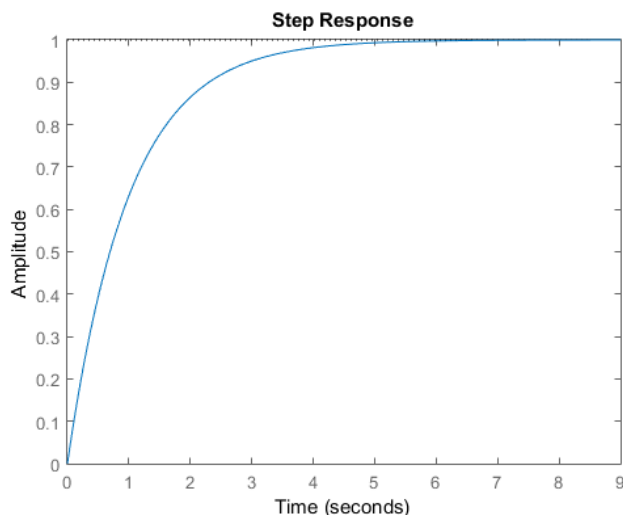
Ett system vars differentialekvation innehåller högst första ordningens derivator kallas för *första ordningens system*.

Ex:

$$\dot{y} + ay = bu \Leftrightarrow \{\text{Laplace}\} \Leftrightarrow (s + a)Y(s) = bU(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{b}{s + a}$$

Genom att införa $K = b/a$ och $T = 1/a$ får man $G(s) = \frac{K}{1+sT}$. K är det värde som stegsvaret kommer gå emot då $t \rightarrow \infty$ och T , som kallas för *tidskonstant* är tiden det tar för stegsvaret att nå 63 % av slutvärdet. Stegsvaret för $K=T=1$ ges i figur 1, notera att amplituden är 0.63 vid tiden 1 sekund.

Notera också att systemet har en enda pol i $s = -a$ och att T blir mindre ju större a är, systemet blir alltså snabbare ju längre denna pol ligger från origo.



Figur 1: Stegsvär för första ordningens system

2.2 2:a ordningens system, poler

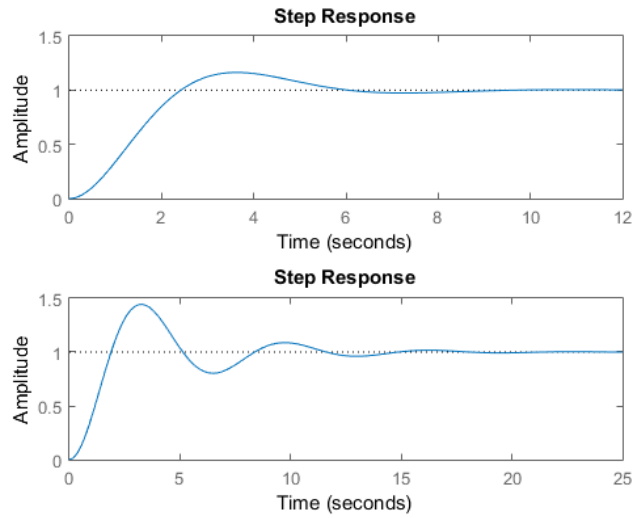
System som innehåller derivator av andra ordningen kallas för *andra ordningens system*.

Ex:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 u \Leftrightarrow \{\text{Laplace}\} \Leftrightarrow (s^2 + a_1 s + a_2) Y(s) = b_0 U(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Systemets karakteristiska ekvation ges alltså av $s^2 + a_1 s + a_2$. Då man analyserar andra ordningens system brukar man jämföra denna med uttrycket $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ där ζ som ligger mellan 0 och 1 kallas *relativ dämpning* och ω_0 i sin tur avgör hur snabbt systemet är. Vi får alltså $a_1 = 2\zeta\omega_0$ och $a_2 = \omega_0^2$.

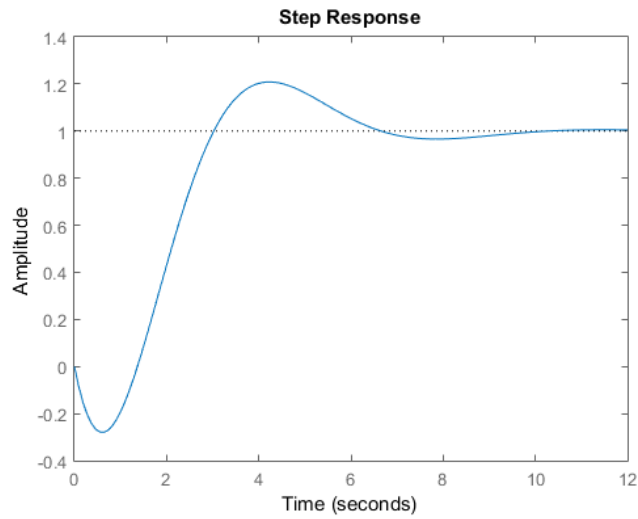
Detta kan relateras till systemets poler genom att lösa $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$, vilket ger att polerna hamnar i $s = \omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2})$. Vi ser att polerna hamnar längre från origo för större ω_0 . Detta är samma sak som ett snabbt system (samma som i 1:a ordnings-fallet). Vi ser även att mindre ζ ger större imaginärdel. Mindre ζ är samma sak som sämre dämpat, så stor imaginärdel är alltså samma som ett dåligt dämpat system. Ett sådant är svängigare och har större översläng. I figur 2 ges två stegsvär med samma ω_0 men olika ζ , i det övre är $\zeta = 0.5$ och i det undre är $\zeta = 0.25$.



Figur 2: Stegsvar för andra ordningens system

2.3 Icke min-fas system

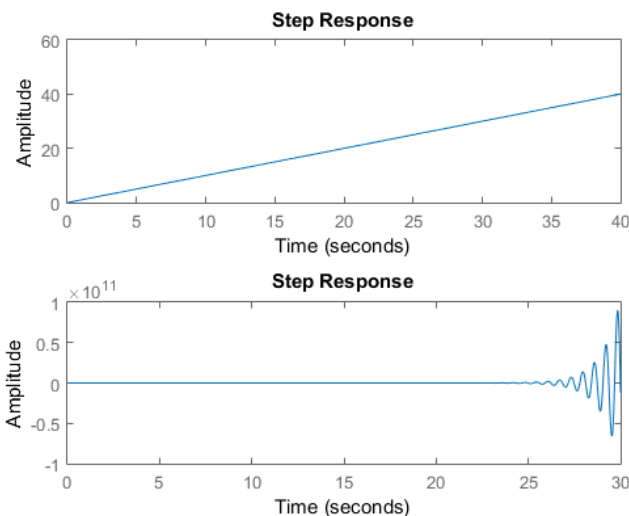
Ett viktigt specialfall är såkallade icke-minfas system som har nollställen i högra halvplanet. För dessa går stegsvaret initialt åt fel håll, se exempel i figur 3



Figur 3: Stegsvar för icke minfas system

2.4 Stabilitet och poler

Ett av de viktigaste resultaten i kursen är följande: ett system är insignal-utsignal stabilt om och endast om *alla poler har strängt negativ realdel*, det vill säga att *alla poler ligger i vänstra halvplanet*. För första ordningens system på den generella formen ovan gäller detta då $a > 0$ och för andra ordningens system gäller det då $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$ (det vill säga alla koefficienter är positiva och nollskilda).



Figur 4: Stegsvår för instabila system

I figur 4 ges stegsvår för två instabila system, det ena med en pol i origo (en såkallad integrator) och det andra med poler i $s = 1 \pm 10i$. Notera att även här ger imaginära poler ett oscillativt stegsvår.

2.5 Slutvärdessatsen

En väldigt viktig sats är slutvärdessatsen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

Med $Y(s) = G(s)U(s)$ och $U(s) = A/s$ vilket är transformen av ett steg med amplitud A får vi:

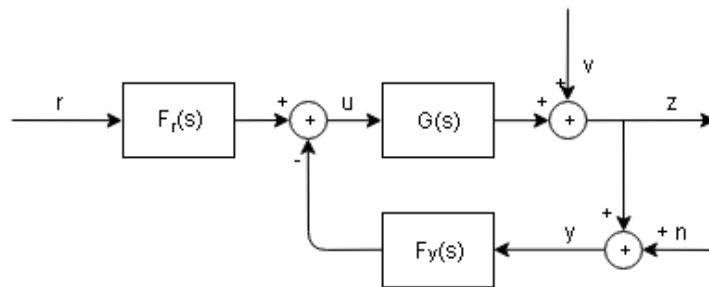
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{A}{s} = AG(0)$$

Då tiden går mot oändligheten kommer alltså steget gå mot $AG(0)$. $G(0)$ kallas för *statisk förstärkning*, och skillnaden mellan statisk förstärkning och det värde man vill att steget skall gå mot kallas för *stationärt fel*.

Det är viktigt att notera att slutvärdessatsen endast gäller om systemet är stabilt, det vill säga att alla poler ligger i vänster halvplan.

3 Regulatorstruktur och blockschema

3.1 Allmän struktur



Figur 5: Allmän regulatorstruktur

Ett blockschema över en allmän regulatorstruktur finns i 6. Följande signaler och system ingår i den allmänna strukturen:

- r : referenssignalen, den signal som man vill att systemet skall följa eller ställa in sig på (t ex önskad temperatur)
- u : insignal till systemet, styrs av regulatorerna F_r och F_y
- v : störsignaler, yttre störningar
- z : faktisk utsignal
- n : mätstörningar, tex mätbrus i en sensor
- y : uppmätt utsignal
- $F_r(s)$: förkompensering (framkoppling) av referenssignalen r
- $F_y(s)$: återkopplingskompensering av utsignalen y
- $G(s)$: det system vi vill reglera

Ur blockschemat kan man genom att Laplacetransformera alla signaler och blockschemaräkning få fram följande samband mellan utsignal $Z(s)$, referenssignal $R(s)$, störsignal $V(s)$ och mätstörningar $N(s)$:

$$Z(s) = G_c(s)R(s) + S(s)V(s) - T(s)N(s)$$

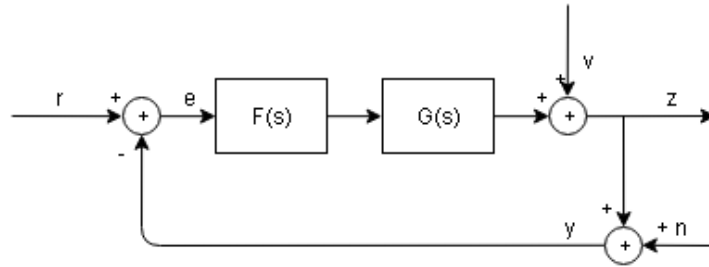
$$G_c = \frac{GF_r}{1 + GF_y}, \quad S = \frac{1}{1 + GF_y}, \quad T = \frac{GF_y}{1 + GF_y}$$

Här är G_c slutna systemets överföringsfunktion, S känslighetsfunktionen och T komplementära känslighetsfunktionen.

S avgör alltså hur känsligt systemet är för yttre störningar, och T avgör hur känsligt systemet är för mätfel.

3.2 Grundläggande struktur

I det mer grundläggande fallet har vi $F_y = F_r = F$ och man får då följande system:



Figur 6: Grundläggande struktur

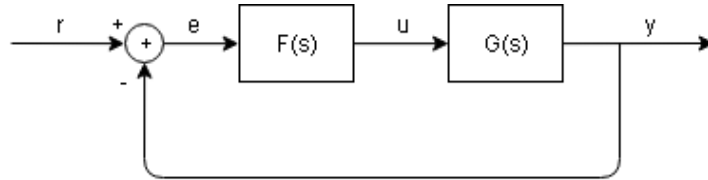
Signalen $e = r - y$ kallas för *reglerfelet*. Vi reglerar alltså med avseende på hur mycket utsignalen skiljer sig från den önskade utsignalen r . Med samma räkningar som ovan får man i detta fall:

$$Z(s) = G_c(s)R(s) + S(s)V(s) - T(s)N(s)$$

$$G_c = \frac{GF}{1 + GF}, \quad S = \frac{1}{1 + GF}, \quad T = \frac{GF}{1 + GF}$$

Notera att $G_c = T$ i detta fall! Notera även att faktorn GF förekommer i alla överföringsfunktioner. Denna faktor kallas för *kretsförstärkning* och betecknas G_o . Man får alltid fram kretsförstärkningen genom att bortse från återkopplingen och beräkna förhållandet mellan utsignalen och insignalen.

Om man inte tar hänsyn till störningarna får man till slut följande enkla system:



Figur 7: System utan störningar

Här är också $G_o = GF$ så att $G_c = \frac{GF}{1+GF}$, det vill säga $Y(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}R(s)$. Detta är den struktur man oftast utgår ifrån.

3.3 Reglerfel och felkoefficienter

Ur detta blockschema kan man också få ett uttryck för reglerfelet: $E(s) = \frac{1}{1+GF}(R(s) - V(s))$. Med hjälp av slutvärdessatsen kan man här beräkna det stationära felet för ett steg med amplitud A (om vi bortser från störningar, dvs $V(s)=0$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+GF} \frac{A}{s} = \frac{A}{1+G_o(0)}$$

Har vi stället en ramp som referenssignal, dvs $r(t) = At, t \geq 0$ så att $R(s) = A/s^2$ får vi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+GF} \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG_o(s)} = \frac{A}{sG_o(0)}$$

Man definierar *felkoefficienterna* e_0 och e_1 enligt:

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G_o(0)}, \quad e_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG_o(0)}$$

4 PID-reglering

PID är det generella fallet av regulator och delas upp i tre delar, P-del, I-del och D-del.

4.1 P-delen

En P-regulator har den enkla överföringsfunktionen $F(s) = K_P$ där K_P är en konstant. P står för proportionell, och P-regulatorn ger alltså en reglering som bara är en proportionalitetskonstant gånger reglerfelet.

Om vi tittar på e_0 från förra avsnittet, med $F = K_P$ får vi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{A}{1 + K_P G(0)}$$

Oavsett $G(s)$ kan vi alltså göra stationära felet godtyckligt lite genom att låta $K_P \rightarrow \infty$. Stort K_P riskerar dock att ge oss ett instabilt system.

4.2 I-delen

En I-regulator ger en utsignal $u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$. I denna verkan tar man alltså med en integral över alla tidigare reglerfel. Överföringsfunktionen ges av $F(s) = K_I/s$. Om man kombinerar en I-regulator med en P-regulator får man en PI-regulator med överföringsfunktion $F(s) = K_P + K_I/s$. Insättning i formeln för stationära felet ger:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + (K_P + K_I/s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sA}{s + (sK_P + K_I)G(s)} = 0$$

Med I-delen får man alltså alltid stationärt fel = 0. Stort K_I ger dock också ett oscillativt och eventuellt instabilt system.

4.3 D-delen

En D-regulator ger en utsignal $u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}$. Överföringsfunktionen blir alltså $F(s) = sK_D$. I denna verkan använder man derivatan av referenssignalen, vilket motverkar svängningar och instabilitet. Kombinerar man P, I och D till en fullständig PID-regulator kan man placera polerna till slutna systemets överföringsfunktion godtyckligt, vilket gör att man kan få vilken dynamik man vill i systemet.

Ofta använder man sig av ett lågpasfilter i D-delen, då derivering förstärker högfrekvent brus. Då får man överföringsfunktionen $F(s) = \frac{\tau_D s}{\alpha \tau_D s + 1}$.

4.4 Sammanfattning PID

Exempel på godtycklig polplacering med PID-regulator:

Om t. ex. $G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2}$ och detta system skall återkopplas med en PID regulator fås $G_c = \frac{GF}{1+GF}$. Polerna ges av den karaktäristiska ekvationen $1 + GF = 0$

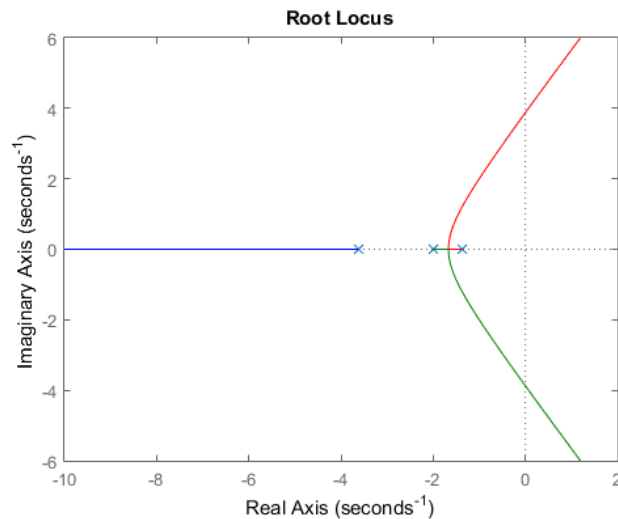
$$1 + GF = 1 + (K_P + K_I/s + K_D s) \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{s^3 + (1 + K_D)s^2 + (a_1 + K_P)s + (a_2 + K_I)b_0}{s^2 + a_1 s + a_2} =$$

Här kan man välja koefficienterna godtyckligt med K_P , K_I och K_D och alltså placera polerna var man vill. Sammanfattningsvis har vi alltså:

- $\underline{K_P}$: Stort K_P ger mindre stationärt fel men riskerar att ge instabilt system
- $\underline{K_I}$: Tar bort stationärt fel, stort K_I ger oscillativt och instabilt system
- $\underline{K_D}$: Motverkar oscillationer och instabilitet, möjliggör godtycklig polplacering

5 Rotort

Rotort är en plot över var polerna till ett system hamnar som funktion av återkopplingsparametern K . Med hjälp av en sådan kan man t. ex. se för vilka värden på K_P eller K_I som man får ett instabilt system.



Figur 8: Rotort

I figur 8 visas rotorten för systemet

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}$$

som återkopplas med en proportionell regulator (P-regulator). För $K=1$ befinner sig polerna i kryssen, och vi har ett stabilt system. För högre K ser vi att polerna får större imaginär del (mer oscillativt) för att sedan gå över i högra halvplanet, så att systemet blir instabilt. Obs att rotorten ritas för det slutna systemet G_c , så plotten ovan är alltså polerna för $\frac{GF}{1+GF}$ med $G(s)$ enligt ovan och $F(s) = K$

6 Nyquistkriteriet, nyquistkurva

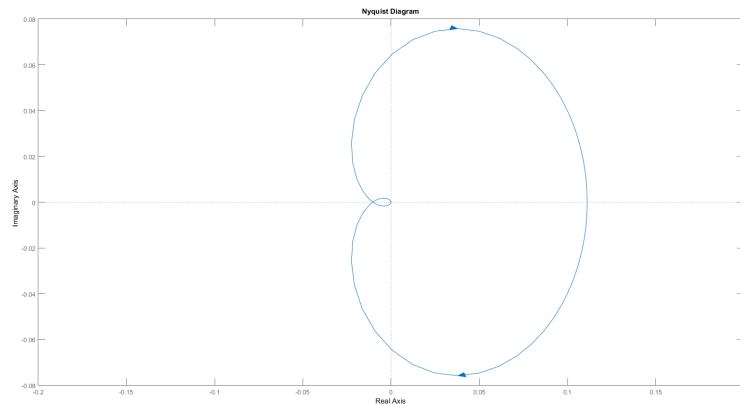
Ett alternativt sätt att undersöka stabiliteten hos ett system är att undersöka *nyquistkurvan*. Denna kurva definieras som $G_o(s)$ då s genomlöper kurvan γ som omsluter högra halvplanet (se boken sidan 75).

Ur detta får vi *Nyquistkriteriet*:

Antalet poler i höger halvplan till det återkopplade systemet G_c är lika med antalet poler i höger halvplan för G_o plus antalet gånger som nyquistkurvan omsluter -1.

Om G_o saknar poler i höger halvplan vilket oftast är fallet får man istället *förenklade Nyquistkriteriet*:

Det återkopplade systemet G_c är stabilt om nyquistkurvan skär realaxeln till höger om punkten -1.



Figur 9: Nyquistkurva

I figur 9 visas nyquistkurvan för systemet

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}$$

Om vi återkopplar detta system med en P-regulator får vi $G_o = KG$ och kurvan ovan är alltså för fallet $K=1$. Vi ser likt i rotorten att systemet är stabilt då. Eftersom $|G_o(s)| = K|G(s)|$ kommer vi då vi ökar förstärkningen flytta skärningspunkten med realaxeln längre från origo. Ur figuren kan man avläsa att skärningspunkten är $s = -0.01$. För $K = 1/0.01 = 100$ får vi skärning i $s = -1$, så systemet är alltså stabilt för $K < 100$.

Viktigt att tänka på med nyquistkriteriet är att man endast kan dra slutsatser om stabilitet utifrån nyquistkurvan om man dessutom känner till antalet poler i högra halvplanet för G_o .

7 Frekvensbeskrivning (bodediagram)

Bodediagram är en användbar metod för att ta reda på hur systemet påverkar insignaler med olika frekvens.

7.1 ”Sinus in sinus ut”

Givet ett stabilt system med överföringsfunktion $G(s)$ och insignal $u(t) = \sin(\omega t)$ kommer utsignalen i stationäritet (då $t \rightarrow \infty$) vara

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \arg G(i\omega)$$

. Detta kallas också att utsignalen går mot detta $y(t)$ *asymptotiskt*. Utsignalen kommer alltså vara amplitudskalad och fasförskjuten.

Om vi till exempel har systemet $G(s) = \frac{1}{s+1}$ och skickar in $u(t) = \sin(t)$, dvs $\omega = 1$ får vi utsignalen som

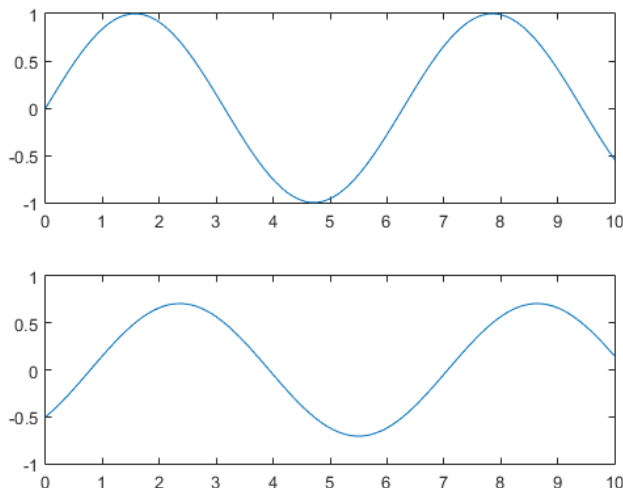
$$y(t) = |G(i)| \sin(t + \arg G(i))$$

. Insättning ger

$$|G(i)| = \left| \frac{1}{1+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$$

$$\arg G(i) = \arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

I figur 10 visas insignal (överst) och utsignal (underst).



Figur 10: Sinus in sinus ut

Om man vill räkna ut fasförskjutningen ur en sådan figur kan man använda formeln $\phi = -\frac{\delta t}{T}2\pi$ där δt är tidsförskjutningen hos utsignalen relativt insignalen.

Om man istället plottar $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ för alla värden på $\omega > 0$ får man systemets *Bodediagram*. Ur detta kan man sedan enkelt läsa av amplitudskalning och fasförskjutning för den frekvens man har på insignalen.

7.2 Bodediagram

I ett bodediagram plottas beloppet och argumentet av systemets $G(i\omega)$ för alla frekvenser ω . Istället för att använda sig av vanlig skala använder man sig dock av logaritmisk skala. Man använder sig av decibelskala, där värdet i decibel ges av $dB = 20 \log |G(i\omega)|$. Vill man gå tillbaka från decibelskala till amplitud använder man $|G(i\omega)| = 10^{\frac{dB}{20}}$

Anledningen till detta är att överföringsfunktionen till ett system består av potenser i s , det vill säga faktorer som sånär som på en konstant är s^p och $\frac{1}{s^q}$. Logaritmerar man sådana faktorer får man $\log(s^p) = p \log(s)$ och $\log(\frac{1}{s^q}) = -q \log(s)$. Vi får alltså att amplitudkurvan blir linjär som funktion av $\log(\omega)$ och lutningen för höga frekvenser blir $p - q$ där p är täljarens högsta gradtal och q är nämnarens högsta.

En annan viktig konsekvens av log-skalan är att om man vill rita bodediagrammet för två överföringsfunktioner multiplicerade med varandra, t ex för

$F(s)G(s)$ när man har regulatorn $F(s)$ får man:

$$\log(F(s)G(s)) = \log(F(s)) + \log(G(s))$$

Multiplikation blir alltså addition i bodediagrammet. Eftersom samma räkneregler gäller för argumentet blir multiplikation addition också i faskurvan.

För en generell överföringsfunktion $G(s)$ kan man alltid faktorisera $A(s)$ och $B(s)$ i första- och andragsgradsfaktorer på formen

$$1 + \frac{s}{a}, \quad 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$

Det är därför intressant att kolla på hur bodediagrammen för dessa faktorer ser ut, det fullständiga bodediagrammet fås sedan bara genom att addera faktorerna i täljaren och subtrahera faktorer i nämnaren.

7.3 Första ordningens faktorer

För första ordningens faktorer $1 + \frac{s}{a}$ får vi för låga frekvenser $G(i\omega) \approx 1$ så att $\log |G(i\omega)| = 0$, och för höga frekvenser $G(i\omega) \approx \frac{i\omega}{a}$ så att $\log |G(i\omega)| = \log \omega - \log a$, alltså lutning 1. Brytpunkten fås då $\omega = a$.

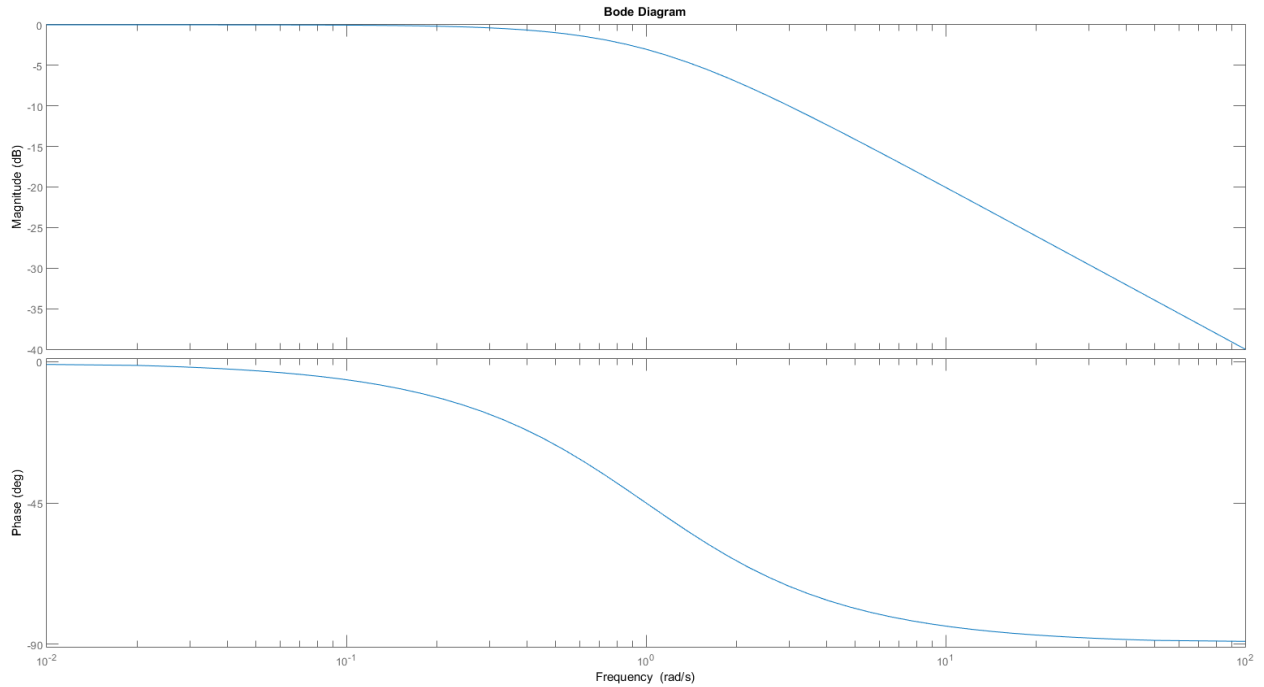
Argumentkurvan fås enligt $\arg G(i\omega) = \arctan(1 + \frac{i\omega}{a}) = \arctan \frac{\omega}{a}$

Ex: Systemet $G(s) = \frac{b}{s+a}$, ett första ordningens system, kan skrivas som

$$G(s) = \frac{b/a}{1 + \frac{s}{a}}$$

Vi har en första ordningens faktor i nämnaren så den ska alltså subtraheras. Vi får $\log |G(i\omega)| = \log(b/a) - \log |1 + \frac{i\omega}{a}|$. För låga frekvenser får vi $\log |G(i\omega)| = \log(b/a)$, brytpunkt för $\omega = a$ och för höga frekvenser $\log |G(i\omega)| = \log(b/a) - (\log \omega - \log a)$. Eftersom argumentet av en konstant är 0 är argumentkurvan $\arg G(i\omega) = -\arg(1 + \frac{i\omega}{a}) = -\arctan \frac{\omega}{a}$.

För systemet $G(s) = \frac{1}{s+1}$, dvs $a=b=1$ får vi följande bodediagram:



Figur 11: Bode för första ordningens system

För exemplet innan med sinus in- sinus ut kan vi här direkt läsa av amplitudskalningen och färförskjutningen vid $\omega = 1$

7.4 Andra ordningens faktorer

För andra ordningens faktorer $1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$ får vi för låga frekvenser likt ovan $G(i\omega) \approx 1$ så att $\log |G(i\omega)| = 0$ och för höga frekvenser $G(i\omega) \approx \frac{(i\omega)^2}{\omega_0^2}$ så att $\log |G(i\omega)| = 2 \log \omega - \log \omega_0^2$. Lutningen blir alltså 2 för höga frekvenser. Brytpunkten ges av $\omega = \omega_0$. Här fås också en resonanstopp som är högre ju mindre relativ dämpning ζ man har. Uttrycket för faskurvan hos en andra ordningens faktor finns på sidan 86 i boken.

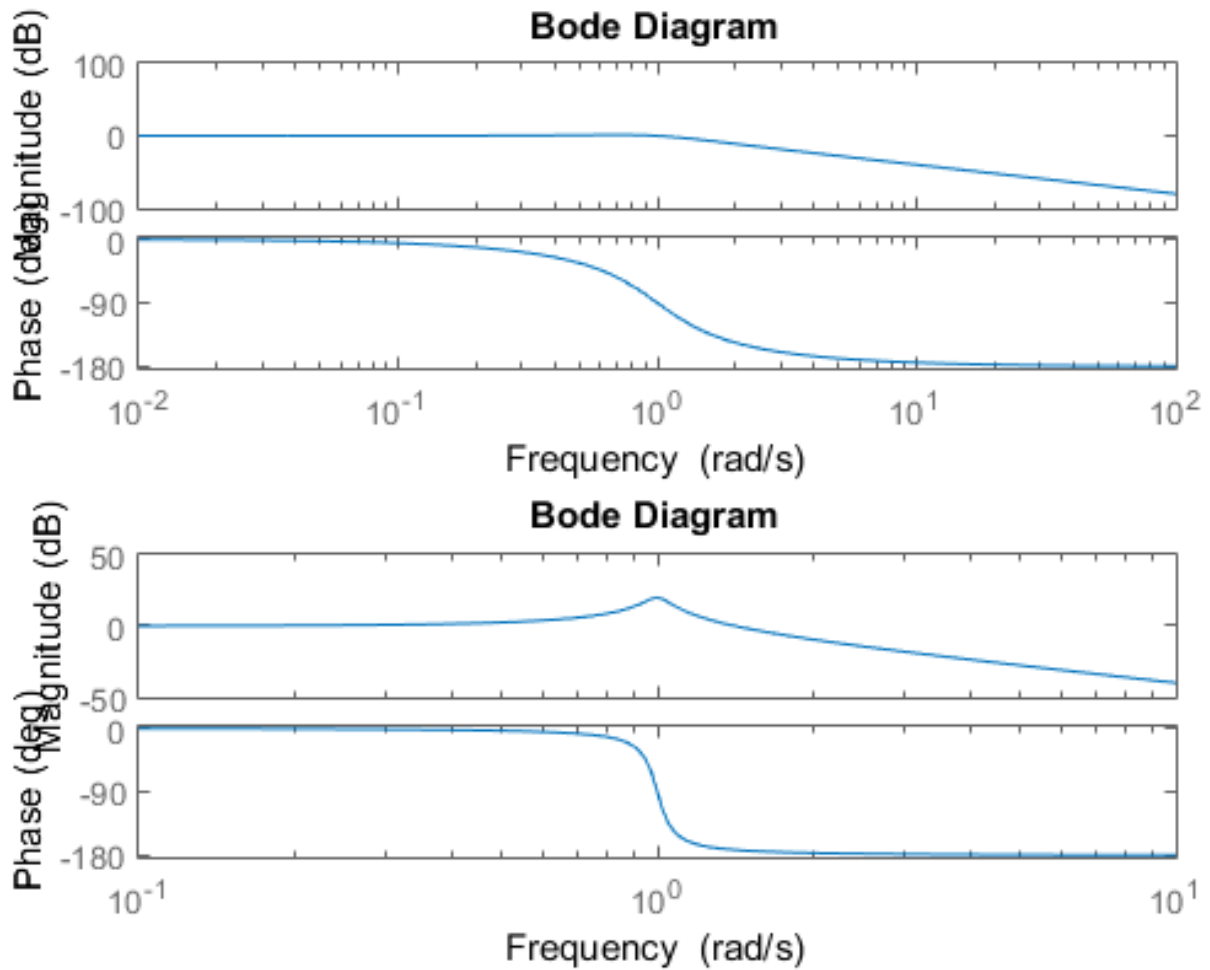
Ex: För ett andra ordningens system $G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2}$ får man med omskrivning

$$G(s) = \frac{b_0/a_2}{1 + \frac{a_1 s}{a_2} + \frac{s^2}{a_2}}$$

Som vi såg i fallet med första ordningens faktorer kommer b_0 endast påverka amplitudkurvan genom addition med en konstant, så vi kan titta på fallet $b_0/a_2 = 1$. Genom att sedan identifiera $a_1 = 2\zeta\omega_0$ och $a_2 = \omega_0^2$ får vi

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

. Vi har alltså en andra ordningens faktor i nämnaren som skall subtraheras, så vi kommer ha lutning 0 för låga frekvenser, -2 för stora och en resonanstopp vid $\omega = \omega_0$. I figur 12 visas bode för två andra ordningens system med $\omega_0 = 1$, det översta med $\zeta = 0.5$ och det understa med $\zeta = 0.05$.



Figur 12: Bode för andra ordningens system

7.5 Kombinerat bodediagram

Som nämnt ovan kan man få bodediagrammet för en generell överföringsfunktion genom att faktorisera den i enkla faktorer och addera dessa.

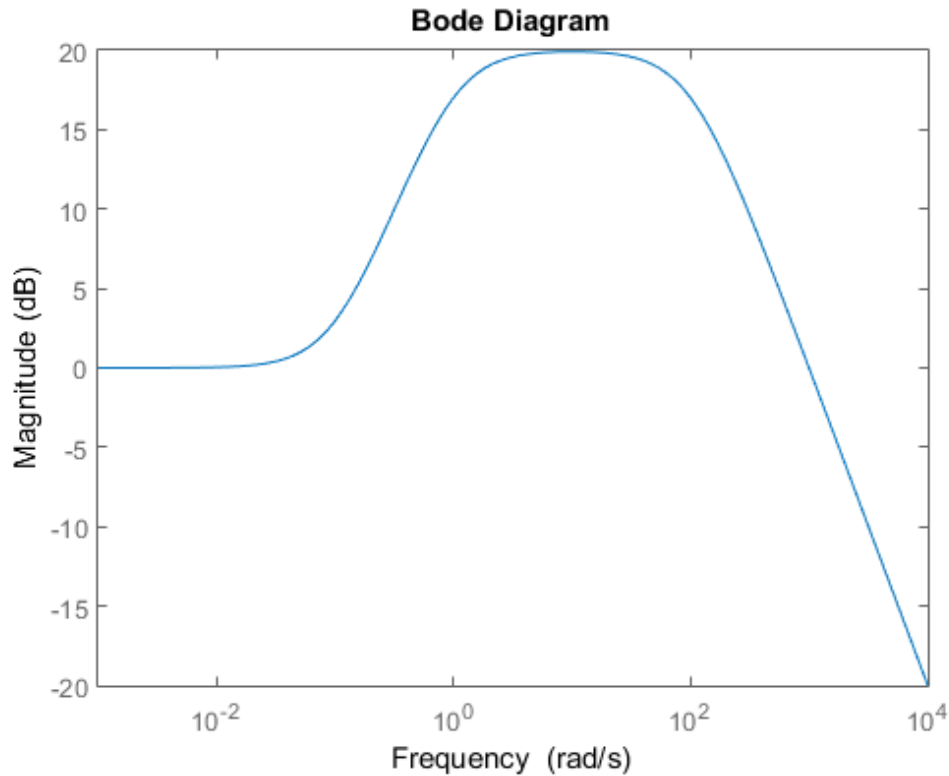
Ex:

$$G(s) = \frac{1000(s + 0.1)}{s^2 + 101s + 100}$$

kan skrivas om till

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.1}}{(1 + s)(1 + \frac{s}{100})}$$

. Vi har alltså brytpunkterna $\omega = 0.1$ (uppåt), 1 (nedåt) och 100 (nedåt).



Figur 13: Bode för generellt system

I figur 13 ges amplitudkurvan, vi ser att lutningen bryter uppåt till 1 vid $\omega = 0.1$ för att sedan bryta nedåt till 0 vid $\omega = 1$ och till -1 vid $\omega = 100$.

7.6 Specifikationer i bodediagram

Då man undersöker bodediagrammet för ett generellt system finns det vissa saker man kan läsa ut som har stor betydelse för systemets egenskaper då det gäller stabilitet och förstärkning.

7.6.1 Statisk förstärkning

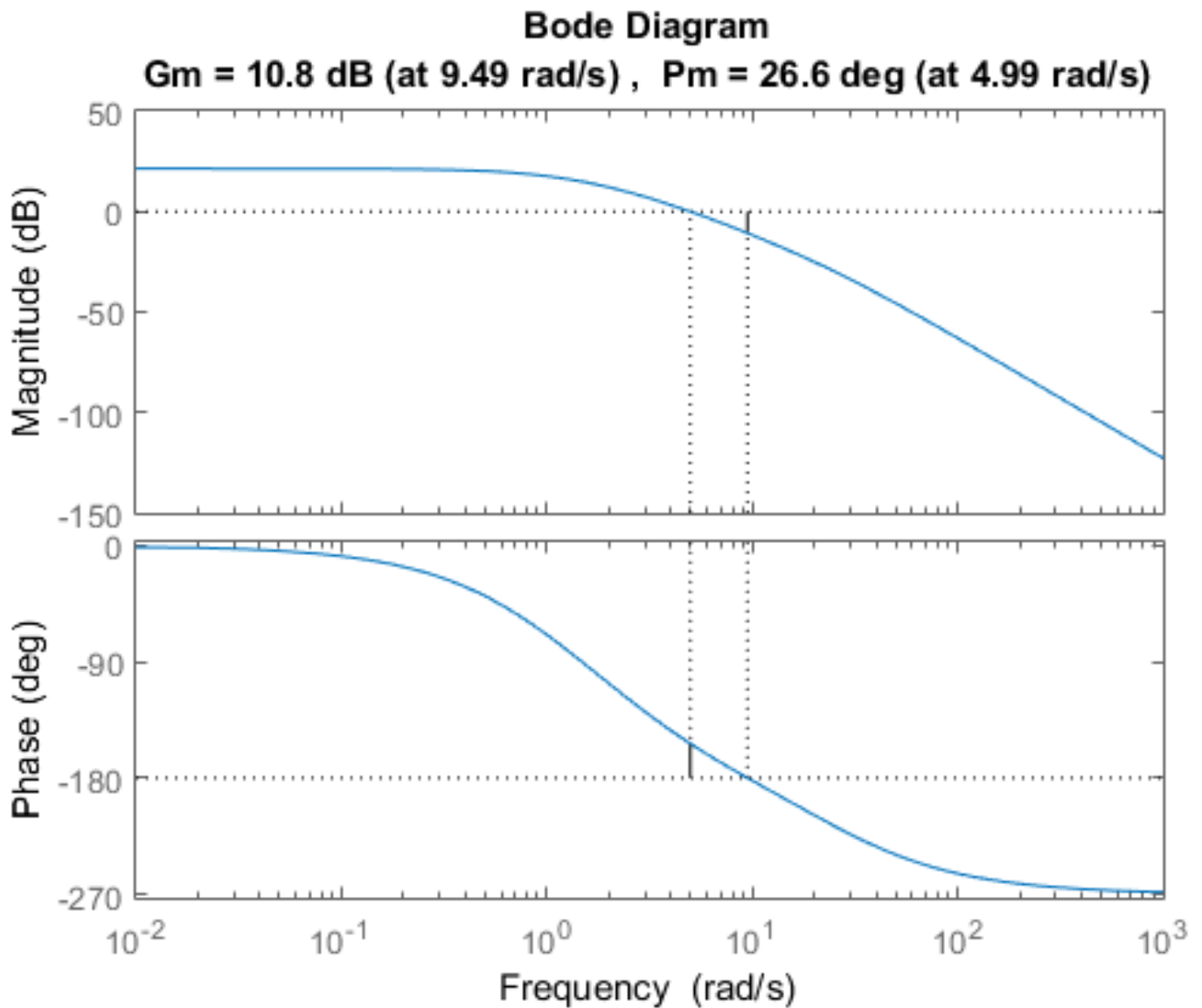
Den statiska förstärkningen definierades innan i samband med slutvärdessatsen. Den kan enkelt läsas av i bodediagramet som $|G(0)|$ och är alltså hur mycket systemet förstärker signaler med frekvensen 0, det vill säga steg.

7.6.2 Amplitud- och fasmarginal

När man diskuterar stabilitet utifrån bodediagramet så tittar man på systemets *amplitud - och fasmarginal*, A_m och ϕ_m .

Utifrån nyquistkriteriet konstaterade vi innan att systemet är precis på stabilitetsgränsen om nyquistkurvan skär punkten -1. Detta är samma sak som att amplituden (beloppet, avståndet från origo) är 1 när argumentet är -180° . Om argumentet är större än -180° vid denna amplitud kommer vi inte skära i -1 och systemet är stabilt. På samma sätt, om amplituden är mindre än 1 vid argumentet -180° har vi också stabilitet.

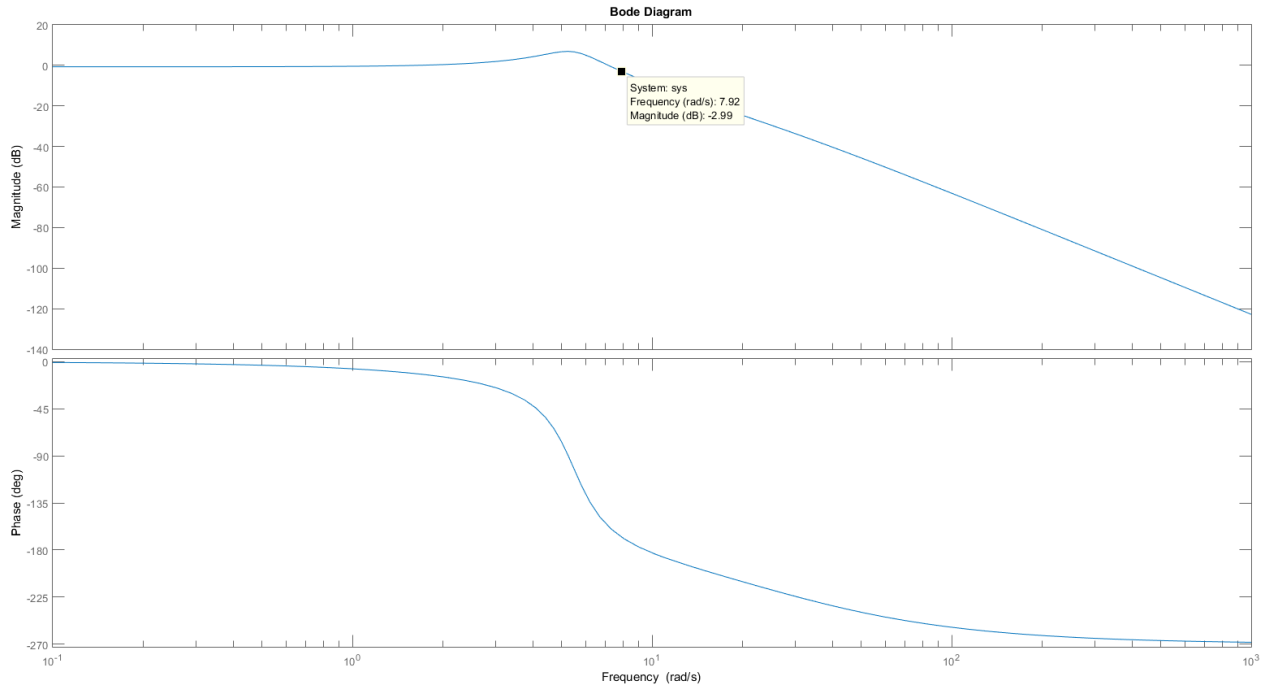
Frekvensen där $|G(i\omega)| = 1$ betecknas ω_c och kallas *skärfrekvens*. Frekvensen där $\arg G(i\omega) = -180^\circ$ betecknas ω_p och kallas *fas-skärfrekvens*. A_m definieras sedan som $A_m = \frac{1}{|G(i\omega_p)|}$ och är alltså hur mycket vi kan öka amplituden (förstärkningen) utan att få $|G(i\omega_p)| = 1$. ϕ_m definieras som $\phi_m = \arg G(i\omega_c) + 180^\circ$ och är alltså fasskillnaden mellan $\arg G(i\omega_c)$ och -180° . I figur 14 visas amplitud - och fasmarginalen i ett bodediagram.



Figur 14: Amplitud - och fasmarginal

7.7 Bodediagram för slutna systemet

De bodediagram vi studerat hittills är endast för $G(s)$. Det finns dock kopplingar mellan vissa specifikationer i detta bodediagram och bodediagramet för det slutna systemet $G_c = \frac{G_o}{1+G_o}$. Då vi inte diskuterat någon regulator har vi $G_o = G$ men kopplingarna är desamma.



Figur 15: Bodediagram för slutet system

I figur 15 visas bodediagramet för G_c då G_o har bodediagram enligt figur 14. Utifrån slutna systemets bodediagram definierar man *bandbredden* ω_b som den frekvens där amplituden har sjunkit en faktor 3 dB, *resonanstoppen* M_p som det högsta värdet på amplitudkurvan och *resonansfrekvensen* ω_r som den frekvens vid vilken denna inträffar. Kopplingarna till specifikationerna i G_o kan sammanfattas som:

- ω_b är proportionell mot ω_c . Bandbredden avgör dessutom hur snabbt systemet är. För att få ett dubbelt så snabbt system kan man dubbla bandbredden, vilket i sin tur alltså är samma som att dubbla skärfrekvensen
- Har man liten ϕ_m får man en stor resonanstopp M_p . Detta svarar alltså mot ett dåligt dämpat system.
- Den statiska förstärkningen kan läsas av i slutna systemets bodediagram. Om $|G_c(0)| = 1$ är $|G_o(0)| = \infty$, det vill säga vi har en integrator i systemet. Annars har vi stationärt fel vilket ses genom att $|G_c(0)| < 1$.

7.8 Tidsfördröjning i bodediagram

En tidsfördröjning på T sekunder ges enligt teori för laplacetransformen som multiplikation med e^{-Ts} . Vi har $|G(i\omega)| = 1$ men $\arg G(i\omega) = -\omega T$. Tidsfördröjning påverkar alltså inte amplitudkurvan, men faskurvan försämras med $-\omega T$, vilket gör att fasmarginalen blir mindre.

8 Kompensering (lead-lag reglering)

När man skall designa en regulator har man ofta krav på stabilitet, snabbhet och felmarginal hos det återkopplade systemet. Med hjälp av öppna systemets bodediagram och de specifikationer som togs fram i förra avsnittet kan man skapa en regulator som uppfyller dessa krav med så kalla lead-lag reglering.

8.1 Från krav till specifikationer

För att bestämma sin regulator måste man först översätta kraven till krav på specifikationer hos systemet.

8.1.1 Krav på snabbhet

Krav på snabbhet är alltid relaterat till skärfrekvensen ω_c . Vill man öka snabbheten hos systemet en faktor K betyder det att man vill ha skärfrekvens $\omega_{c,d} = K\omega_c$ (d står för desired). Snabbhet kan relateras till t. ex. stigtid, så dubblering av skärfrekvens ger halvering av stigtiden. Om kravet är att göra systemet så snabbt som möjligt handlar det om att välja så hög skärfrekvens som möjligt samtidigt som man uppfyller övriga krav på stabilitet och felmarginal.

8.1.2 Krav på stabilitet

Krav på stabilitet hör ihop med fasmarginalen ϕ_m . Ofta har man ett direkt krav på ett tröskelvärde som fasmarginalen inte får underskrida. Har man krav på att t. ex. behålla samma översläng eller resonanstopp kan det tolkas som att man vill ha kvar samma fasmarginal.

8.1.3 Krav på felmarginal

Krav på felmarginalen är relaterat till felkoefficienterna e_0 och e_1 , samt den statiska förstärkningen $|G(0)|$.

Har man kravet $e_0 = 0$ måste G_o innehålla en *integrator*, det vill säga en faktor $\frac{1}{s}$. Detta motsvarar att $|G(0)| = \infty$. Om systemet man skall reglera, $G(s)$ redan innehåller en integrator är detta uppfyllt. Detta kan ses i bodediagrammet som att amplitudkurvan har lutning -1 för låga frekvenser, eftersom $\log \frac{1}{s} = -\log s$. Har man kravet $e_1 = 0$ måste G_o på samma sätt innehålla en faktor $\frac{1}{s^2}$.

Om man har krav på att någon av dessa koefficienter inte skall vara noll har man

istället ett tröskelvärde som dessa inte får överskrida. Man får då bestämma sin regulator så att detta tröskelvärde inte överskrids.

8.2 P-reglering

Den enklaste regulatorn man kan kompensera med är en P-regulator $F(s) = K_P$. Eftersom $\arg F(i\omega) = \arg K_P = 0$ påverkar denna regulator endast amplitudkurvan. Om man vill flytta skärfrekvensen till $\omega_{c,d}$ görs detta genom att välja K_P så att

$$K_P |G(i\omega_{c,d})| = 1$$

Om man forfarande har önskvärd fasmarginal vid den nya skärfrekvensen är man då klar. Om så inte är fallet behöver man använda en *fasavancerande länk* eller *lead-länk*.

8.3 Lead-länk

Överföringsfunktionen till en lead-länk ges av

$$F_{lead}(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

. Detta är alltså en PD-regulator med lågpasfilter. Koefficienten β avgör hur stor fasavancering man kan få, men stort β leder till stor förstärkning (risk för oscillationer). Stort τ_D ger större deriveringsverkan (motverkar oscillationer).

När man designar lead-länken börjar man med att avläsa fasmarginalen vid den nya skärfrekvensen $\omega_{c,d}$ ur bode-diagramet för $G(s)$. Nödvändig fasavancering fås ur

$$\phi = \phi_{m,d} - \phi_m$$

Med hjälp av fasavanceringen kan sedan β bestämmas ur fig 5.13, sid 106 i boken. När man bestämt β bestäms τ_D ur

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d} \sqrt{\beta}}$$

Detta val gör att man får maximal fasavancering vid $\omega_{c,d}$. K-delen bestäms sedan på samma sätt som då man bestämmer en P-regulator, fast nu får vi

$$|F_{lead}(i\omega_{c,d})| |G(i\omega_{c,d})| = 1 \Leftrightarrow \{|F_{lead}(i\omega_{c,d})| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}\} \Leftrightarrow K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{c,d})|}$$

Denna regulator uppfyller kraven på snabbhet (skärfrekvens) och stabilitet (fasmarginal). Om den dessutom uppfyller kraven på felmarginal är vi klara. Om inte måste vi komplettera med en *fasretarderande länk* eller *lag-länk*

8.4 Lag-länk

Överföringsfunktionen till en lag-länk ges av

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Som man hör på namnet retarderar denna länk fasen, och minskar alltså fasmarginalen. För att inte få för stor minskning väljer man

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}}$$

Detta gör att man får en fasretardering på ca 6° . **OBS:** använder man en lag-länk måste man därför lägga till 6° till önskad fasavancering i lead-länken för att få rätt fasmarginal.

Väljer vi $\gamma = 0$ här får vi en ren I-regulator som ger $e_0 = 0$ om $G(s)$ ej innehåller en integrator, eller $e_1 = 0$ om $G(s)$ innehåller en integrator. Ofta vill man dock inte ha ren integration utan har istället ett tröskelvärde som krav. Man får då räkna ut felkoefficienterna för G_o med regulatorn:

$$\begin{aligned}
e_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + F_{lead}(s)F_{lag}(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} G(s)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{K}{\gamma} G(0)} \\
e_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG_o(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sF_{lead}(s)F_{lag}(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sK \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} G(s)} = \frac{\gamma}{sKG(0)}
\end{aligned}$$

9 Känslighet och robusthet

Det finns tre huvudsakliga saker som försämrar prestandan hos ett regelsystem:

- Begränsad styrsignal, man kan av fysikaliska skäl inte generera för stora insignaler
- Modellfel, modellen $G(s)$ är en uppställd modell som inte överensstämmer helt med verkligheten
- Störningar, likt $v(t)$ och $n(t)$ som vi såg i avsnitt 3

9.1 Modellfel, robusthetskriteriet

Om man antar att den verkliga modellen $G^0(s)$ ges av $(1 + \alpha)G(s)$ har vi ett relativt modellfel

$$\Delta G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = \alpha$$

Notera att ΔG kan vara en funktion av s , så att vi har olika stort modellfel för olika frekvenser. Givet ΔG kan vi använda *robusthetskriteriet* för att avgöra om systemet fortfarande är stabilt trots modelfelet:

Det återkopplade systemet är stabilt om:

$$|\Delta G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$$

Där $T(i\omega)$ är den *komplementära känslighetsfunktionen*, se avsnitt 3. Kom också ihåg att i det grundläggande fallet är $G_c = T$! Om ΔG inte är konstant kan man rita bodediagram för $\frac{1}{\Delta G(i\omega)}$, om beloppsskurvan för denna ligger över beloppsskurvan för $T(i\omega)$ är systemet robust.

Notera också att systemet kan vara stabilt om robusthetskriteriet inte är uppfyllt, men kriteriet garanterar stabilitet.

9.2 Störningskänslighet

Yttre störningar relateras till känslighetsfunktionen $S(s)$. Idealt skulle man därför vilja att $S(s) = 0$, men detta går inte att uppnå. En fundamental gräns är *Bodes integral* (se sid 123 i boken) som säger att integralen av känslighetsfunktioner över alla frekvenser alltid är lika stor. Detta innebär att om man sänker förstärkningen för känslighetsfunktionen för vissa frekvenser så höjs den för andra, man måste alltså kompromissa!

10 Tillståndsform

Som nämndes i avsnitt 1 beskrivs systemen i kursen av linjära differentialekvationer. Ett annat sätt att representera ett sådant system, istället för att använda överföringsfunktionen är genom *tillståndsform*:

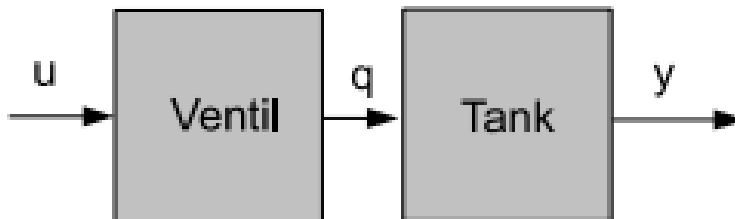
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

Här är A, B och C matriser, och x är en vektor som innehåller systemets *tillstånd*. Beroende på hur man väljer att modellera systemet kan man beskriva samma system med olika tillstånd, men typiska tillstånd är t. ex. hastighet, läge, vinkel, vinkelhastighet etc.

10.1 Diffekvationer till tillståndsform

Det finns inget ”recept” på hur man går från beskrivningen av ett system till tillståndsform. I grunden handlar det dock om att först bestämma vad man ska använda som tillstånd, sedan sätta upp differentialekvationer för dessa. Om diffekvationerna är olinjära måste man linjärisera dem. Man skriver sedan diffekvationerna på matrisform.

Ex (från tenta 140822):



Figur 16: System med två tankar

I figur 16 ges ett system som består av två tankar. Överföringsfunktionerna för dessa tankar ges av:

$$Y(s) = \frac{k_T}{s\tau_T + 1}Q(s), \quad Q(s) = \frac{k_V}{s\tau_V + 1}U(s)$$

Vi vill skriva systemet på tillståndsform med tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = q$. Genom att multiplicera upp nämnarna i överföringsfunktionerna får vi:

$$\begin{cases} (s\tau_T + 1)Y(s) = k_T Q(s) \\ (s\tau_V + 1)Q(s) = k_V U(s) \end{cases}$$

Invers laplacetransform av båda ekvationer ger:

$$\begin{cases} \tau_T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_T q(t) \\ \tau_V \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = k_V u(t) \end{cases}$$

Insättning av tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = q$ ger:

$$\begin{cases} \tau_T \dot{x}_1 + x_1 = k_T x_2 \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -x_1/\tau_T + k_T/\tau_T x_2 \\ \tau_V \dot{x}_2 + x_2 = k_V u(t) \Leftrightarrow \dot{x}_2 = -x_2/\tau_V + k_V/\tau_V u \end{cases}$$

På matrisform får vi:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1/\tau_T & k_T/\tau_T \\ 0 & -1/\tau_V \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ k_V/\tau_V \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) x$$

Vi har alltså:

$$A = \begin{pmatrix} -1/\tau_T & k_T/\tau_T \\ 0 & -1/\tau_V \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k_V/\tau_V \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0)$$

Matrisen A kallas för systemets *systemmatris* och har den mycket viktiga egenskapen att A:s egenvärden är samma som polerna till överföringsfunktionen för systemet. C bestämmer vilket av tillstånden som skall mätas som utsignal, i ovanstående modell har vi ju som bekant $x_1 = y$.

10.2 Från överföringsfunktion till tillståndsform (styrbar kanonisk form)

Det finns flera sätt att gå från överföringsfunktion till tillståndsform. Ett enkelt sådant är *styrbar kanonisk form*. Om överföringsfunktionen ges av:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Får man matriserna:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

En lika enkel motsvarighet är *observerbar kanonisk form*, se sidan 151 i boken.

10.3 Från tillståndsform till överföringsfunktion

För att gå från tillståndsform till överföringsfunktion utgår man från

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Det vi vill ha är överföringsfunktionen $G(s)$ i uttrycket

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

. Genom att laplacetransformera tillståndsformen får man

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Leftrightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \Leftrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Laplacetransformerar man $y(t) = Cx(t)$ får vi $Y(s) = CX(s)$ vilket ger

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

Jämför vi med det vanliga uttrycket ovan ser vi att

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Om A är en 2×2 matris kan vi använda formeln

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

där $\det(A) = ad - bc$, för att räkna ut $(sI - A)^{-1}$.

10.4 Poler och nollställen

Polerna till ett system i tillståndsform ges som nämndes ovan av egenvärden till systemmatrisen A , det vill säga lösningar till

$$0 = \det(sI - A)$$

En förklaring till detta kan ses i fallet med 2×2 matris ovan: Insättning av $(sI - A)$ i inversformeln ger att vi får en faktor $\frac{1}{\det(sI - A)}$ i nämnaren till överföringsfunktionen. $\det(sI - A)$ är alltså samma som polpolynommet eller karakteristiska ekvationen.

För att få fram nollställen till ett system på tillståndsform kan man använda formeln ovan för att få fram överföringsfunktionen, och beräkna nollställen ur denna.

11 Tillståndsåterkoppling

När man återkopplar ett system på tillståndsform kallas det för *tillståndsåterkoppling*. Man återkopplar alltså relativt de olika tillstånden i systemet som hastighet, läge eller vinkel. Detta görs genom att sätta

$$u = -Lx + l_0r$$

Här är $L = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$ återkopplingsvektorn som bestämmer hur mycket man ska återkoppla på respektive tillstånd, och l_0 är en framkoppling på referenssignalen för att nå önskad förstärkning. Insättning av detta i tillståndsformen ger

$$\dot{x} = Ax + B(-Lx + l_0r) \Leftrightarrow \dot{x} = (A - BL)x + l_0Br$$

Polerna till detta system ges nu istället av $0 = \det(sI - (A - BL))$ så genom att ändra vektorn L kan man ändra placering av polerna. L bestäms genom att räkna ut $\det(sI - (A - BL))$ och jämföra detta med önskat polpolynom. Vill vi t. ex. ha poler i -2 får vi i 2×2 fallet:

$$\det(sI - (A - BL)) = (s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

Ur detta får man ett ekvationssystem för l_1 och l_2 .

l_0 bestäms sedan så att man får statisk förstärkning $|G_c(0)| = 1$. Notera alltså att om man går från denna tillståndsform till överföringsfunktion så får man överföringsfunktionen G_c för det slutna systemet.

Tillståndsåterkopplingen kan alltså delas upp i två steg:

- Bestäm först L så att önskade poler fås
- Räkna sedan ut $G_c = C(sI - (A - BL))^{-1}l_0B$ och bestäm l_0 så $|G_c(0)| = 1$

11.1 Styrbarhet

En fråga som kommer upp i samband med tillståndsåterkoppling är om man alltid kan placera polerna för slutna systemet godtyckligt. Svaret är att så är fallet om systemet är *styrbart*. För att avgöra styrbarhet använder man styrbarhetsmatrisen:

$$S = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$$

Systemet är styrbar endast om denna matris är inverterbar det vill säga

$$\det(S) \neq 0$$

Ex (från tenta 160819)

Systemet ges av

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Är systemet styrbart? Vi får

$$S = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser enkelt att $\det(S) = 0$ så systemet är inte styrbart. Om vi återkopplar systemet med $u = -Lx$ får vi polpolynommet

$$\det(A - BL) = \det \begin{pmatrix} s + 1 & 0 \\ -2 + l_1 & s - 1 + l_2 \end{pmatrix} = (s + 1)(s - 1 + l_2)$$

Vi får alltså en pol i $s = -1$ oavsett val av l_1 , så vi kan inte placera poler godtyckligt. Som tur är ligger dock denna pol i vänstra halvplanet, så systemet kan göras stabilt genom att välja l_2 så att den andra polen också hamnar där.

12 Rekonstruktion av tillstånd

Ofta kan det vara svårt att mäta alla tillstånd i en modell. Isåfall kan man istället göra en skattning av tillstånden. Detta går ut på att man endast mäter utsignalen $y(t)$. Matriserna A, B och C är samma då dessa ju utgör den modell man ställt upp av systemet. Man får då på tillståndsform

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

Där \hat{x} är en skattning av de verkliga tillstånden. Man känner alltså inte till x , men man mäter y och vet ju att $y = Cx$. Om vi visste det exakta värdet på x så att $\hat{x} = x$ vore alltså $y - C\hat{x} = 0$. Vi inför denna signal i tillståndsmodellen och får

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Där

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n)^T$$

kallas för *observatör*. Om man inför *skattningsfelet* $\tilde{x} = x - \hat{x}$ får man med omskrivningar av ovanstående tillståndsform

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$

Med K kan man alltså placera egenvärden till matrisen $A - KC$ (likt L till matrisen $(A - BL)$) och ju snabbare denna matris görs (poler längre från origo) desto snabbare avtar skattningsfelet. Vill man t. ex. att skattningsfelet skall avta som e^{-2} ska polerna placeras i -2 .

12.1 Observerbarhet

I tillståndsformen har vi som bekant $y(t) = Cx$. När vi skattar tillstånd får vi istället $\hat{y}(t) = C\hat{x}$. Med C-matrisen väljer vi alltså vilket av tillstånden vi ska ha som utsignal, och kunna skatta de andra tillstånden med. Om vi kan skatta

alla övriga tillstånd med vårt val av utsignal är systemet *observerbart*. Ett sätt att ta reda på om systemet är observerbart är observerbarhetsmatrisen:

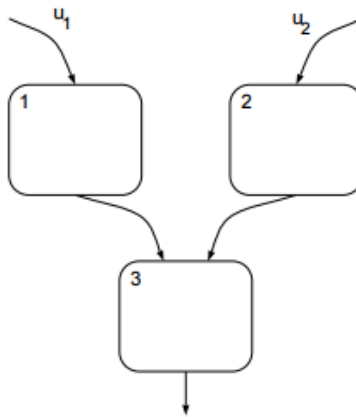
$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Systemet är observerbart om denna matris är inverterbar, det vill säga

$$\det(O) \neq 0$$

Detta innebär också att polerna till observatören K kan väljas godtyckligt, alltså observatören kan göras godtyckligt snabb.

Ex (från tenta 130828):



Figur 17: Sjösystem

I figur 17 visas ett sjösystem. Vi har valt tillståndsvariablerna x_n som vattennivån i respektive sjö. Vi har också följande tillståndsmodell:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Frågan är vilket av dessa tillstånd vi ska välja att mäta som utsignal för att vi ska kunna skatta de andra tillstånden. Vi skall alltså avgöra för $y = x_1, x_2$ eller x_3 dvs $C = (1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0)$ eller $(0 \ 0 \ 1)$ om systemet är observerbart.

Intuitivt verkar det svårt att skatta alla tillstånd om vi mäter vattennivån i sjö 1 eller 2, eftersom dessa inte är kopplade på något sätt.

Eftersom systemet är 3x3 får vi

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}$$

Första valet på C, dvs $y = x_1$ ger:

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser enkelt att $\det(O) = 0$, systemet är alltså inte observerbart.

För andra valet på C, dvs $y = x_2$ får vi:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Här är också $\det(O) = 0$.

För tredje valet $y = x_3$ får vi:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -2 & -(\alpha^2 + \alpha) & 1 \end{pmatrix}$$

och beräknar vi determinanten fås

$$\det(O) = -(\alpha^2 + \alpha) + 2\alpha = \alpha(-\alpha + 1)$$

Systemet är alltså observerbart om $\alpha \neq 1$. α är i detta fall proportionalitetskonstanten med vilken man mäter nivån i sjö 1 och 2, och man får alltså inte mäta dessa nivåer med samma konstant.

Som slutsats måste man alltså mäta nivån i sjö nr 3 för att skatta nivån i övriga sjöar, och nivån i sjö 1 och 2 måste påverka utsignalen olika mycket vilket känns rimligt.