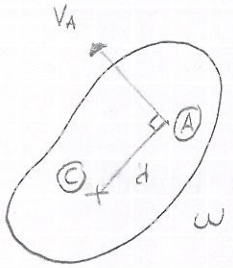
FÖ2: Kinematik

MOMENTANCENTRUM: M.C är en punkt i kroppen (eller i en tänkt förlängning av kroppen) där hastigheten momentant är noll. Det betyder att kroppen momentant roterar kring M.C.

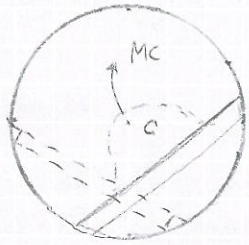
Betrakta en plan kropp & kalla punkten som är MC för C



$V_A = \omega \cdot d$

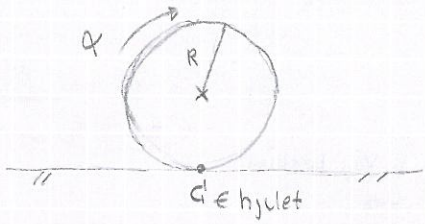
∵ Vet vi C:s läge behöver vi inte använda $\bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{\omega} \times \bar{CA}$, $\bar{V}_C = \bar{0}$:

Ex1

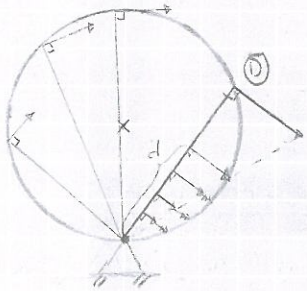


"Stång i ett rör"

Ex2 "Indianöverfallet"; Hjul som rullar utan glidning



I ex2 har hjulet samma fart som underlaget, dvs $\bar{V}_C = \bar{0}$ ⇒ ∵ C' är MC & hjulet rullar momentant kring C'



Vi kan enkelt räkna ut farten i t.ex. D: $V_D = \omega \cdot d$

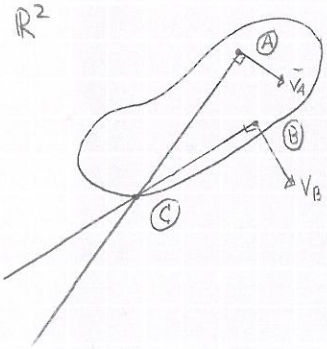
Alt till att räkna med X-product $\bar{V}_D = \bar{V}_C + \bar{\omega} \times \bar{CD}$

[OBS: M.C ⟹ $\bar{V}_C = \bar{0}$ men $\bar{a}_C \neq \bar{0}$ i allmänhet]

$|V_D| = |\bar{\omega} \times \bar{CD}| = |\bar{\omega}||\bar{CD}| \cdot \sin\beta = |\bar{\omega}||\bar{CD}|$

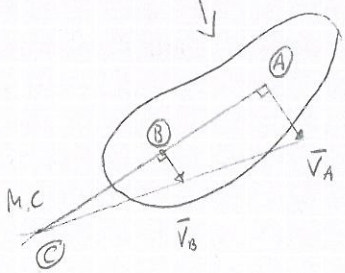
Bestämning av MC:s läge Om $\bar{v}$ är känd till riktning i två punkter ⇒ MC:s läge kan bestämmas geometriskt:

i $\mathbb{R}^2$



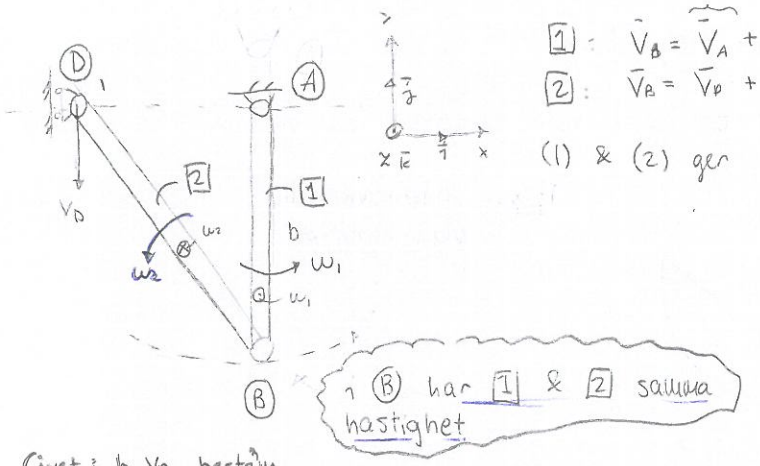
$\bar{V}_A \perp \bar{CA}$ & $\bar{V}_B \parallel \bar{CB}$: Skärningen mellan linjerna ger MC:s läge.

OBS! Om $\bar{V}_A$ & $\bar{V}_B$ är ∥ kan MC konstrueras ur proportionalitet i belopp



Vid ren translation antas M.C ligga i oändligheten (om $\bar{V}_A$ & $\bar{V}_B$ är lika långa)

Exempel 4: Plant problem



i B har 1 & 2 samma hastighet

Givet: b, V_D, bestäm ω_1 & ω_2

$\bar{V}_A = 0$ tr A är en fix punkt

$\boxed{1}$: $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{AB}$ (1)

$\boxed{2}$: $\bar{V}_B = \bar{V}_D + \bar{\omega}_2 \times \bar{DB}$ (2)

(1) & (2) ger $\bar{\omega}_1 \times \bar{AB} = \bar{V}_D + \bar{\omega}_2 \times \bar{DB}$

Representera vektorerna i basen

$\bar{AB} = -b\bar{j}$ (4)

$\bar{DB} = b\bar{i} - b\bar{j}$ (5)

$\bar{V}_D = -V_D\bar{j}$ (6)

$\bar{\omega}_1 = \omega_1\bar{k}$ (7)

$\bar{\omega}_2 = -\omega_2\bar{k}$ (8)

(4) - (8) i (3): $\omega_1\bar{k} \times (-b\bar{j}) = -V_D\bar{j} + (-\omega_2)\bar{k} \times (b\bar{i} - b\bar{j}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega_1 b\bar{i} = -V_D\bar{j} - \omega_2 b\bar{j} - \omega_2 b\bar{i}$ (9)

$\bar{k} \curvearrowright \bar{j}$, $\bar{i}$

ex: $i \times j = k$, $j \times i = -k$

Komponentvis identifikation:

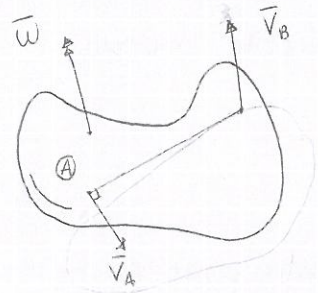
i: $\omega_1 b = -\omega_2 b$

j: $0 = -V_D - \omega_2 b$

$\Rightarrow \therefore \omega_1 = \frac{V_D}{b}$ $\omega_2 = \frac{-V_D}{b}$ (dvs roterar moturs om $V_D > 0$)

Räkna 1 * a.

ACCELERATIONSSAMBAND FÖR EN STEL KROPP (3D)



Om A & B är punkter i en stel kropp gäller

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$$

Tidsderivera $\bar{a}_B = \dot{\bar{V}}_B = \dot{\bar{V}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{AB} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{AB}} =$

$$= \begin{cases} \bar{\alpha} = \dot{\bar{\omega}} \text{ (vinkelacc.)} \\ \dot{\bar{AB}} \overset{(*)}{=} \bar{\omega} \times \bar{AB} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB})}$$

(*)

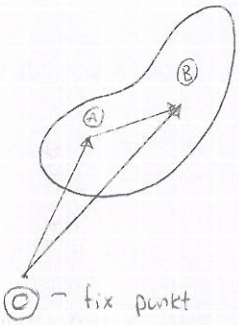
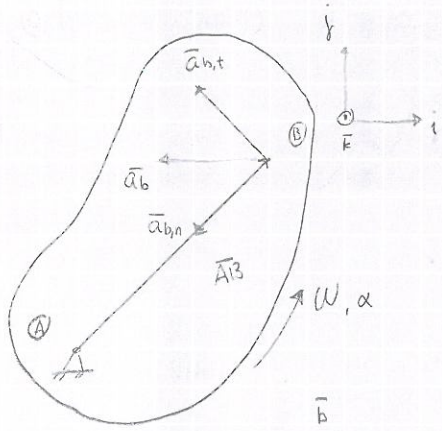


Fig: $\bar{OB} = \bar{OA} + \bar{AB}$. Derivera!

$$\underbrace{\dot{\bar{OB}}}_{\bar{V}_B} = \underbrace{\dot{\bar{OA}}}_{\bar{V}_A} + \dot{\bar{AB}} \Rightarrow \dot{\bar{AB}} = \bar{V}_B - \bar{V}_A \quad \text{jfr} \quad \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$$

identifikation ger $\dot{\bar{AB}} = \bar{\omega} \times \bar{AB}$



Viktigt specialfall: plan rörelse & rotation kring fix axel eller punkt.

Vekteridentifikation: $\bar{\omega} = \omega \bar{k}$, $\bar{\alpha} = \alpha \bar{k}$

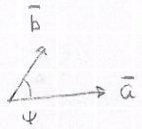
$\bar{a}_A = 0 \Rightarrow \bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB}) = \bar{a}_{B,t} + \bar{a}_{B,n}$

där $\bar{a}_{B,t} = \bar{\alpha} \times \bar{AB} \perp \bar{AB}$, $\bar{a}_{B,n} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB})$ riktad mot A

- $\bar{a}_{B,t} = \bar{\alpha} \times \bar{AB} = |\bar{\alpha}||\bar{AB}| \sin 90° = |\bar{\alpha}||\bar{AB}|$
- $|\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB})| = |\bar{\omega}||\bar{\omega} \times \bar{AB}| \sin 90° =$

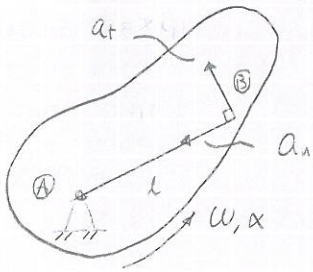
$$= |\bar{\omega}||\bar{\omega}||\bar{AB}| \sin 90° \sin 90° = |\bar{\omega}|^2 |\bar{AB}|$$

Från Algebra $\Rightarrow$



$\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \psi$

Elementarfall: Standardresultat; Acc i B vid plant fall

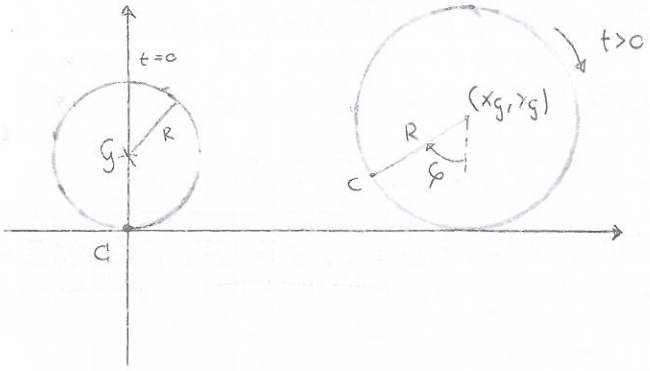


Vi har: $\bar{a}_t = \bar{\alpha} \times \bar{AB} = |\bar{\alpha}||\bar{AB}| = \alpha l$

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB}) = |\omega|^2 |\bar{AB}| = \omega^2 l = [\, v_B = \omega l \,] = \omega v_B$$

OBS! LÅR UTANTILL

Rullande hjul: Ett hjul rullar på plant underlag utan glidning i det fixa planet xy



Figuren ger följande samband:

$$(1)\begin{cases} x_c = x_g - R\sin\varphi \\ y_c = y_g - R\cos\varphi \end{cases}$$

där C är en kroppsfix punkt på hjulets periferi & G är hjulets Mittpunkt. Vinkeln φ är positiv & mäts från vertikalen.

Derivering av sambanden ger hastighets- & accelerationssamband. $\omega = \dot\varphi$, $\alpha = \ddot\varphi$

$$(2)\begin{cases} \dot x_c = \dot x_g - R\cos\varphi\cdot\omega \\ \dot y_c = \dot y_g + R\sin\varphi\cdot\omega \end{cases} \Rightarrow (3)\begin{cases} \ddot x_c = \ddot x_g + R\sin\varphi\,\omega^2 - R\cos\varphi\,\alpha \\ \ddot y_c = \ddot y_g + R\cos\varphi\,\omega^2 + R\sin\varphi\,\alpha \end{cases}$$

Pga problemets karaktär har vi två kinematiska tvång: $\begin{cases} x_g = R\varphi & \text{(ren rullning)} \\ y_g = R & \text{(plant underlag)} \end{cases}$

Derivering av kinematiska tvång ger $\begin{cases} \dot x_g = R\omega \\ \dot y_g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot x_g = R\alpha \\ \ddot y_g = 0 \end{cases}$

Om vi använder kinematiska tvång i (1), (2), & (3) fås

$$\bar r_c = R(\varphi - \sin\varphi)\bar e_x + R(1-\cos\varphi)\bar e_y$$

$$\bar v_c = v_g(1-\cos\varphi)\bar e_x + v_g\sin\varphi\,\bar e_y, \quad v_g = |\bar v_g| = \dot x_g$$

$$\bar a_c = \left(a_g(1-\cos\varphi) + \frac{v_g^2}{R}\sin\varphi\right)\bar e_x + \left(a_g\sin\varphi + \frac{v_g^2}{R}\cos\varphi\right)\bar e_y, \quad a_g = |\bar a_g| = \ddot x_g$$

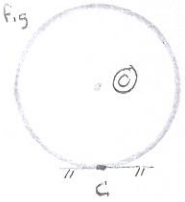
Från FC: $v_c = 0$, $\bar a_c \neq 0$, hur beräknas accelerationen i godtycklig punkt?

Gör sålär: Beräkna först $\bar a_o$ (dvs acc i centrumpunkten) genom att teckna hastigheten i centrumpunkten & derivera $\bar v_o = \omega R\bar i$, $\forall t$ ∵ Ok att derivera (se fig.)

{CBS! Endast i denna punkt har hjulet denna egenskap (konst riktning)}

$\bar v_o = \omega R\bar i$, dvs $\bar a_o = \alpha R\bar i$. Vi kan nu beräkna acceleration i godtycklig med utgångspunkt i denna punkt.

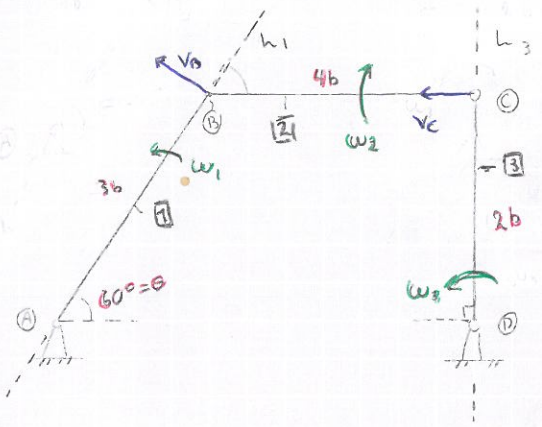
fig



$$\bar a_c = \bar a_o + \bar\omega\times(\bar\omega\times\bar{OC}) + \bar\alpha\times\bar{OC} = \alpha R\bar i + (-\omega\bar k)\times((-\omega\bar k)\times(-R\bar j)) + (-\alpha\bar k)\times(-R\bar j) = \omega^2 R\bar j$$

Fö 3: Räkneföreläsning 1

Uppgift 5* Givet ω_1, bestäm ω_2 & ω_3



OBS! Momentancentrum för $\boxed{2}$ då $h_1 = h_3$

$\boxed{1}$: $\bar{v}_B = \omega_1 \cdot 3b$

$\boxed{2}$: $v_B = \omega_2 \cdot l_1$

$v_C = \omega_2 \cdot l_3$

$\boxed{3}$: $v_C = \omega_3 \cdot 2b$

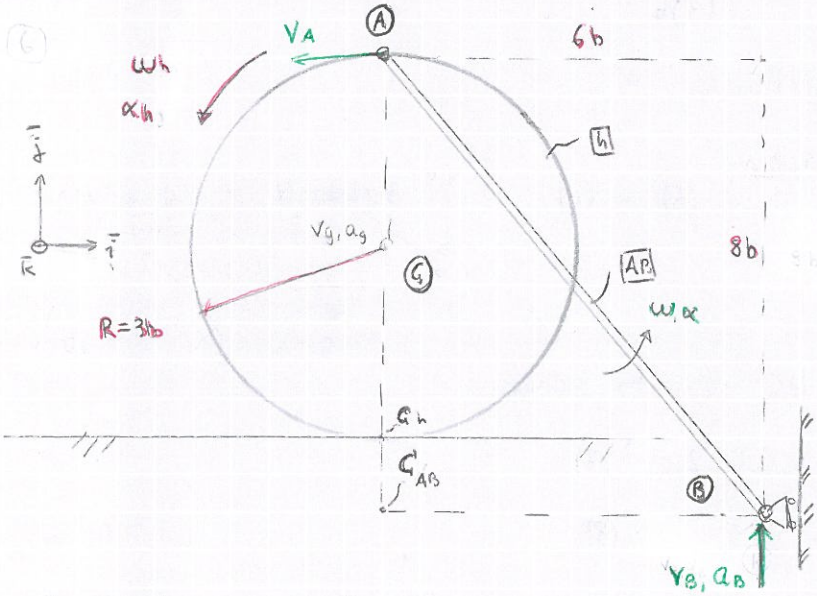
Vi kallar axel från M.C för kropp $\boxed{2}$ till Ⓑ för l_1 & till Ⓒ för l_3:

$l_1 = (4b)/\cos 60° = 8b$

$l_3 = 4b \cdot \tan 60° = 4\sqrt{3}\,b$

∴ Vi har nu fyra ekvationer för fyra obekanta

$$\begin{cases} \omega_3 \cdot 2b = \omega_2 \cdot l_3 \\ \omega_1 \cdot 3b = \omega_2 \cdot l_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{3\omega_1}{8}, \quad \omega_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{Svar}}: \ \omega_2 = \frac{3\omega_1}{8} \ \& \ \omega_3 = \frac{3\sqrt{3}\,\omega_1}{4}$$



Uppgift 6*

Givet: b, R = 3b
ω_h, α_h, α
rullning utan glidning

Bestäm: α & a_B

Accelerationssamband

$\boxed{AB}$ $\quad \bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{BA}) + \bar{\alpha} \times \bar{BA}$ (1)

Vid Ⓑ $\quad \bar{a}_B = \bar{0} + a_B \bar{j}$ (2) (Kinematiskt tvång)

$\boxed{h}$ $\quad \bar{a}_A = \bar{a}_G + \bar{\omega}_h \times (\bar{\omega}_h \times \bar{GA}) + \bar{\alpha}_h \times GA$ (3)

Vid Ⓖ $\quad \bar{v}_G = \{M.C \ \bar{i} \ C_h\} = -\omega_h \cdot R\,\bar{i}, \ \forall t \Rightarrow \bar{a}_G = -\dot{\omega}_h \cdot R\,\bar{i}$ (Kinematiskt tvång)

rullar åt höger

representera i baserna

$$\begin{cases} \bar{\omega}_h = \omega_h \bar{k} \\ \bar{\alpha}_h = \alpha_h \bar{k} \\ \bar{\omega} = \omega \bar{k} \\ \bar{\alpha} = \alpha \bar{k} \\ \bar{BA} = -6b\bar{i} + 8b\bar{j} \\ \bar{GA} = R\bar{j} \end{cases}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{BA} = -6\omega b\bar{j} - 8\omega b\bar{i}$$
$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{BA}) = 6\omega^2 b\bar{i} - 8\omega^2 b\bar{j}$$
$$\bar{\alpha} \times \bar{BA} = -6\alpha b\bar{j} - 8\alpha b\bar{i}$$
$$\bar{\omega}_h \times \bar{GA} = -\omega_h R\bar{i}$$
$$\bar{\omega}_h \times (\bar{\omega}_h \times \bar{GA}) = -\omega_h^2 R\bar{j}$$
$$\bar{\alpha}_h \times \bar{GA} = -\alpha_h R\bar{i}$$

(1) med (2) $\Rightarrow$

$$\bar{a}_A = a_B\bar{j} + 6\omega^2 b\bar{i} - 8\omega^2 b\bar{j} - 6\alpha b\bar{j} - 8\alpha b\bar{i} \qquad (1)b$$

(3) med (4) $\Rightarrow$

$$\bar{a}_A = -\alpha_h R\bar{i} - \omega_h^2 R\bar{j} - \alpha_h R\bar{i} \qquad (3)b$$

(1)b = (3)b & komponentvis identifikation

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}: \quad & 6\omega^2 b - 8\alpha b = -\alpha_h R - \alpha_h R \\ \bar{j}: \quad & a_B - 8\omega^2 b - 6\alpha b = \omega_h^2 R \end{aligned}\right\} (5) \ \& \ (6)$$

$\therefore$ 3 obekanta & 2 st ekvationer

Hastighetssambandet

Teckna v_A på två sätt med MC C_2 för stången:

Hjulet har MC i C_h $\Rightarrow$ $v_A = \omega_h \cdot 2R$ (7)

Stången har MC i C_{AB} $\Rightarrow$ $v_A = \omega 8b$ (8)

(7) & (8) ger $\omega = \frac{R}{4b}\omega_h$ (9)

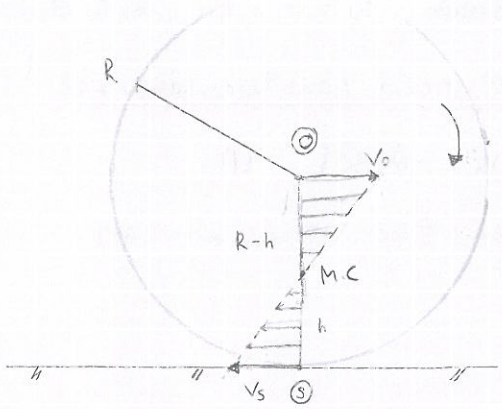
Givet att $R = 3b$

(9) $\Rightarrow$ $\omega = \frac{3}{4}\omega_h$ (10)

Lösn ((5), (6), & (10)) $\Rightarrow$ $a_B = \frac{3}{2}(\omega_h + 4\alpha b)$ där $\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{27}{16}\omega_h + 3\alpha_h\right)$

Svar: $\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{27}{16}\omega_h + 3\alpha_h\right)$ & $a_B = \frac{3}{2}(\omega_h + 4\alpha b)$

Uppgift 5/109 Två parallella hastigheter & proportionalitet mellan axlar



OBS! Glidning M.C ej i backen

Givet: $R = 0{,}325$

$N = 200$ varv/min

$\omega = \frac{N \cdot 2\pi}{60} = \frac{200}{60} \cdot 2\pi = \frac{20\pi}{3}$ rad/s

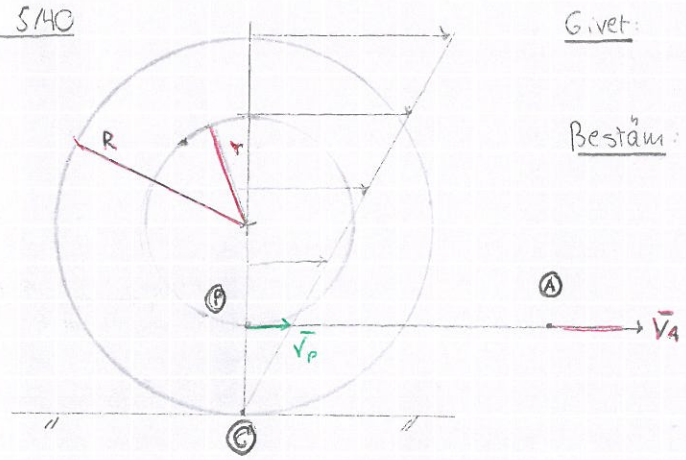
$h = 0{,}100$ m (Avstand från backen till MC)

Bestäm: V_0 & V_S

Svar: $V_0 = \omega(R-h) \approx 4{,}71$ m/s

$V_S = \omega h \approx 2{,}09$ m/s

Uppgift 5/140



Givet: ingen glidning, $\bar{V}_A = 0{,}8$ m/s, $R = 0{,}9$ m
$r = 0{,}3$ m

Bestäm: V_0, ω

OBS! Rullning utan glidning ger M.C. i C.

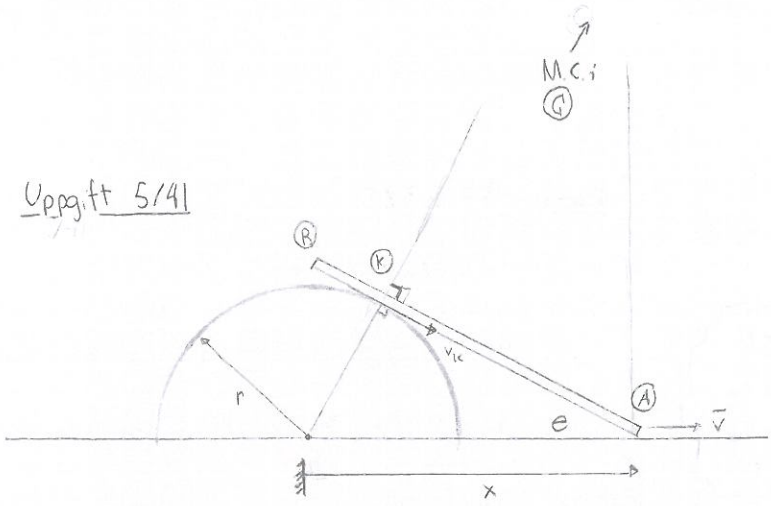
$V_P = \omega |\bar{CP}| = \omega(R-r)$

$V_P = V_A$, ty ingen glidning mellan snöre & trumma

$\therefore \quad \omega = \frac{V_A}{|\bar{CP}|} = \frac{V_A}{R-r} \approx 1{,}33$ rad/s

$V_0 = \omega |\bar{CO}| = \omega R = 1{,}2$ m/s

Uppgift 5/41



Givet: $v_A (= v)$, r

Bestäm: $\omega = \dot{\theta}$ s.f.a, x & θ

Konstruera momentancentrums läge

$v_A = -\dot{\theta}\,|\overline{AC}|$ (1)

(koll $\dot{\theta} > 0 \Rightarrow v_A > 0$ ok!)

Bestäm $|\overline{AC}|$

Triangeln CKA: $|\overline{KA}|^2 + r^2 = x^2$

$|\overline{KA}| = \sqrt{x^2 - r^2}$

$\sin\theta = \frac{r}{x}$

Triangeln KCA:

$\sin\theta = \frac{|\overline{KA}|}{|\overline{AC}|}$ (4)

$|\overline{AC}| = \frac{|\overline{KA}|}{\sin\theta} = \frac{x\sqrt{x^2 - r^2}}{r}$

Svar: $\dot{\theta} = \frac{-v_A}{|\overline{AC}|} = \frac{v r}{x\sqrt{x^2 - r^2}}$, $x \approx r \Rightarrow \dot{\theta}$ stor vilket är rimligt!

Fö 4: Plan kinetik

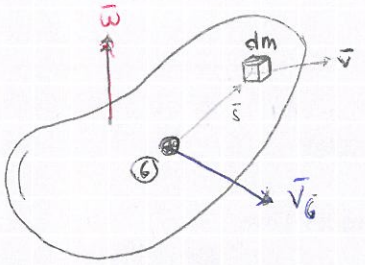
Rörelselagarna: En stel kropps rörelse beskrivs av translation & rotation (Partikel: bara translation)

Euler I: $\sum \bar{F} = \dot{\bar{G}} = \left\{ \begin{matrix} \text{visas} \\ \text{idag} \end{matrix} \right\} = m \cdot \bar{a}_G$ (1) (kraftlagen) "Beskriver translation"

Euler II: $\sum \bar{M}_{\bar{G}} = \dot{\bar{H}}_G$ (2) (Momentlagen)

där $\bar{G}$ = rörelsemängd, $\bar{H}$ = rörelsemängdsmoment

Rörelsemängd, $\bar{G}$, för en stelkropp (3D)



Masselementet dm har rörelsemängden:

$$d\bar{G} = dm\,\bar{v} \rightarrow \bar{G} = \int \bar{v}\, dm \quad (3)$$

(Anm: $\int_\Omega \ldots dm = \int_\Omega \ldots \rho\, dV \underset{t.ex}{=} \int_\Omega \ldots \rho\, dx\, dy\, dz \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3$)

Kinematik (stel kropp) =>

$$\bar{v} = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s} \quad (4)$$

(4) insatt i (3) ger $\bar{G} = \int (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s})\, dm = \bar{v}_G \int_\Omega dm + \bar{\omega} \times \int_\Omega \bar{s}\, dm$

ty $\bar{v}_G$ & $\bar{\omega}$ beror ej på läget av dm

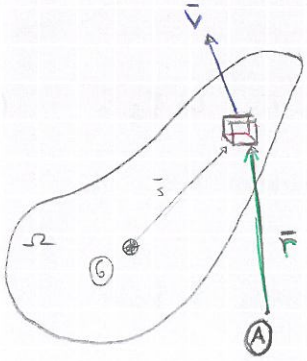
Enligt ekvation för masscentrum är $\int \bar{s}\, dm = \bar{0}$ (se sammanfattning för bevis)

$$\therefore \quad \bar{G} = m \cdot \bar{v}_G \quad (5)$$

"Rörelsemängden hos stelkropp"

Rörelsemängdsmoment, $\bar{H}$, hos en stel kropp (3D)

$\bar{H}$ beror av vilken referenspunkt man väljer, m.a.p $\bar{G}$!



$d\bar{H}_A = \bar{r} \times \bar{v}\, dm$ ger att $\bar{H}_A = \int \bar{r} \times \bar{v}\, dm$

Masselementet dm har rörelsemängdsmoment

$d\bar{H}_G$ m.a.p G: $dH_G = \bar{s} \times dm \cdot \bar{v}$

$\bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times \bar{v}\, dm = \left\{ \begin{matrix} \text{tentamensplikting} \\ \text{övning} \end{matrix} \right\} =$

$$\Rightarrow \quad \{ \bar{v} = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s} \} \Rightarrow$$

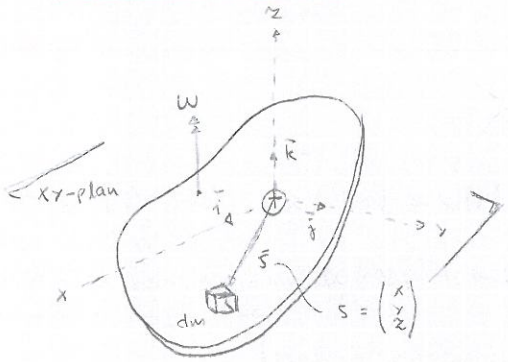
$$= \bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s})\, dm = \int \bar{s} \times \bar{v}_G\, dm + \int \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm =$$

$$= \underbrace{\int \bar{s}\, dm}_{=0} \times \bar{v}_G + \int \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm$$

$$\boxed{\therefore \quad \bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm \qquad (6)}$$

"Rörelsemängdsmoment med avseende på G"

Specialfall av (6): $\bar{H}_G$ vid plan rörelse i xy-planet



"Plan skiva symmetrisk kring z-axel"

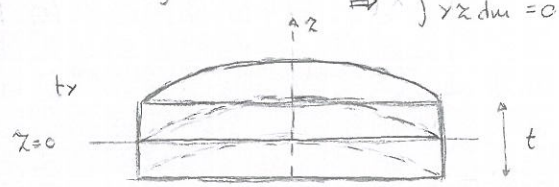
Tillämpar (6) på fallet

$$(6) \Rightarrow \quad \bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm =$$

$$= \int_\Omega (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times [\omega\bar{k} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})]\, dm =$$

$$= \int_\Omega [\underbrace{-\omega x z \bar{i}}_{=0} - \underbrace{\omega y z \bar{j}}_{=0} + \omega (x^2 + y^2)\bar{k}]\, dm$$

OBS! Om densiteten ρ = konstant & kroppen symmetrisk kring $z=0$: $\Rightarrow \int yz\, dm = 0, \ \int xz\, dm = 0$



Ex $\int_\Omega xz\, dm = \int xz\rho\, dx\, dy\, dz = \int x\rho\, dx\, dy \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} z\, dz}_{=0} = 0$

$I_G = 2mb^2$ 7 ex vid det vatten

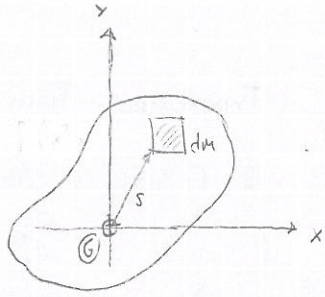
$$\boxed{\therefore \quad \bar{H}_G = \omega \int (x^2 + y^2)\, dm\, \bar{k} = \omega I_G \bar{k} \qquad (7)}$$

I_G = kroppens masströghetsmoment M a p G kring z-axeln

Beror av kroppens massa & form

Notera $\bar{H}_G \perp$ xy-planet

Sammanfattning: Plan rörelse



Ekvation (7) ger: $\bar{k}$: $H_G = I_G \omega$

där $I_G = \int (x^2+y^2)\,dm = \int s^2\,dm$

I_G är kroppens massträgheetsmoment map axel $\perp$ mot planet som går genom massceentrum G. Finns i Table D/4

Rörelselagarna (1) (2) vid plan rörelse

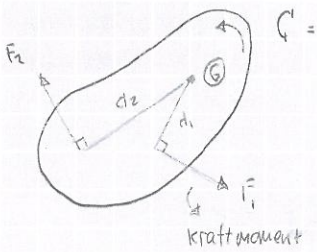
$$\begin{cases} \sum \bar{F} = \dot{\bar{G}} = m\dot{\bar{v}}_G = m\bar{a}_G \\ \sum M_G = \dot{H}_G = I_G \cdot \dot{\omega} = I_G \cdot \alpha \end{cases}$$

Tolkning: $m \sim$ Translationströghet (motvilja till hastighetsförändring)
$I_G \sim$ Rotationströghet (motvilja till rotationshastighetsförändring)

Vänsterledet i Eulers andra, momentsumman:

$\sum M_G$, momentsumman m a p G representerar den totala vridande verkan på kropp. Påverkas av krafter & kraftparsmoment.

Ex



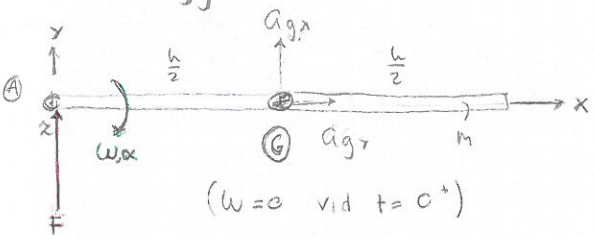
C = "couple forces"
kraftparsmoment

Beräkning av momentsumman

$+\circlearrowleft \sum M_G = F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + C$ → Glöm ej C!

Typexempel: Tunn stång (på friktionsfritt bord)

I Frilägg & sätt ut krafter



($\omega = 0$ vid $t = 0^+$)

II $\Sigma F = m\bar{a}_G$ ger

$\rightarrow$: $0 = m a_{G,x}$ (a)

$\uparrow$: $F = m a_{G,y}$ (b)

$\nearrow\!\!\!\nwarrow$: $N - mg = 0$

OBS!
Direkt skalär metod kräver att alla skalarer ($a_*, \omega_*, \alpha_*, F_*, \ell_*$) finns med i frilägggning. Annars -poäng

III $\Sigma M_G = I_G \alpha$

$\circlearrowright G$: $F \frac{h}{2} = I_G \alpha$ (c)

Tabell ger $I_G = \frac{mh^2}{2}$ för smal stång

$$\begin{cases} (a) \Rightarrow & a_{Gx} = 0 \\ (b) \Rightarrow & a_{Gy} = \frac{F}{m} \\ (c) \Rightarrow & \alpha = \frac{6F}{mh} \end{cases}$$

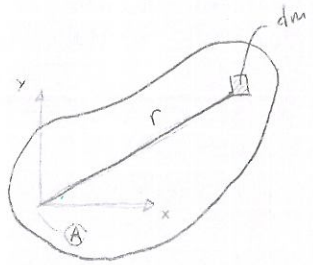
IV Kinematik

$$\bar{a}_A = \bar{a}_G + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{GA}) + \bar{\alpha} \times \overline{GA} = a_{Gx}\bar{i} + a_{Gy}\bar{j} + \alpha \frac{h}{2}\bar{j}$$

(a), (b) & (c) ger då $\bar{a}_A = \frac{4F}{m}\bar{j}$

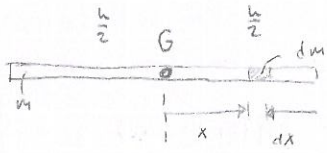
FÖ. 5: Plan kinetik m.a.p godt. punkt

Tröghetsmoment i 2D



[Def $I_A = \int_\Omega r^2 dm = \int_\Omega (x^2+y^2)\,dm$, k-system i ref-punkt]

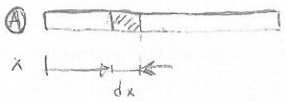
Ex 1 Smal stång (massbelagd tråd, ingen tjocklek)



$$dm \overset{(*)}{=} \frac{m}{h}\,dx$$

$$I_G = \int_\Omega (x^2+0^2)\,dm \underset{(*)}{=} \int_{-h/2}^{h/2} x^2 \frac{m}{h}\,dx = \frac{mh^2}{12}$$

M.a.p A



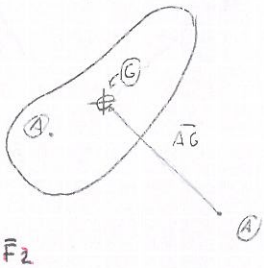
$$\rightarrow \quad I_A = \int_0^h x^2 \frac{m}{h}\,dx = \frac{mh^2}{3}$$

Förflyttningsregler

"Med dessa kan man räkna om en storhet till en ny godtycklig referenspunkt, T.ex från I_G till I_A, $\Sigma \bar{M}_A$ till $\Sigma \bar{M}_B$ eller $\bar{H}_G$ till $\bar{H}_A$"

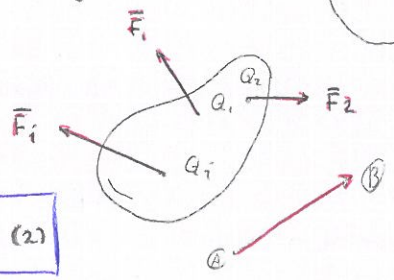
1 För tröghetsmoment (Steiners sats): Från I_G till I_A (A godt. pkt)

$$\boxed{I_A = I_G + m \cdot |\bar{AG}|^2 \qquad (1)}$$



Ex $I_A = \{\text{stången}\} = \frac{mh^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mh^2}{3}$

2 För momentsumman "$\Sigma \bar{M}$"

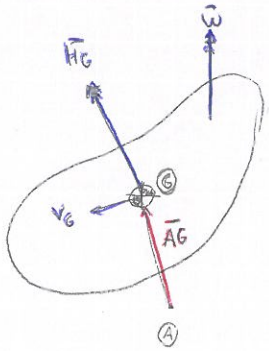


Följande gäller

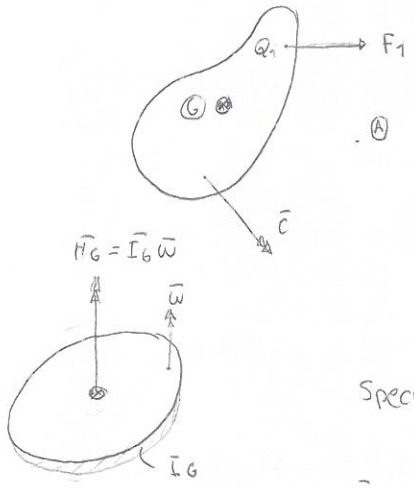
$$\boxed{\Sigma \bar{M}_A = \Sigma \bar{M}_B + \bar{AB} \times \Sigma \bar{F} \qquad (2)}$$

3 För rörelsemängdsmoment $\bar{H}_G$ gäller (3D)

$$\boxed{\bar{H}_A = \bar{H}_G + \bar{AG} \times m\bar{v}_G}$$



Momentlagen m.a.p en godt. punkt A (3D)



Enligt postulat: $\sum \bar{F} = m\bar{a}_G$ (4)

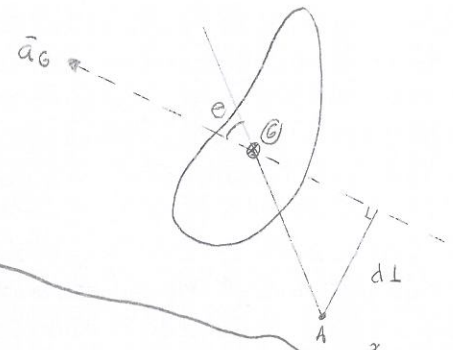
$\sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G$ (5)

Hur ser (5) ut m.a.p godtycklig punkt?

För flyttningssats (2) $\Rightarrow$ $\left[\sum \bar{M}_A = \sum \bar{M}_G + \bar{AG} \times \sum \bar{F} \quad (6)\right]$

(4),(5) i (6) ger $\left[\sum \bar{M}_A \underset{3D}{=} \dot{\bar{H}}_G + \bar{AG} \times m\bar{a}_G \text{ , A godt. punkt } (7)\right]$

Specialfall av (7): Plan rörelse (viktigt, kommer bara användas i 2D)



Teckna beloppet av x-prod i (7)

$|\bar{AG} \times m\bar{a}_G| = m|\bar{a}_G| \cdot \underbrace{|\bar{AG}| \sin\theta}_{d\perp}$

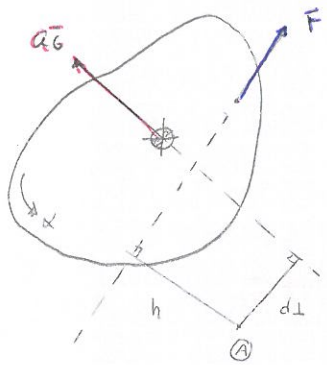
$\therefore \quad \boxed{\sum M_A \overset{2D}{=} I_G\alpha \pm m\bar{a}_G \cdot d\perp}$

Anm 1. Får administrera tecken i sista term själv (hh-regeln)

2. Om $A = G \Rightarrow d\perp = 0$

$\therefore \sum M_G = I_G \cdot \alpha$

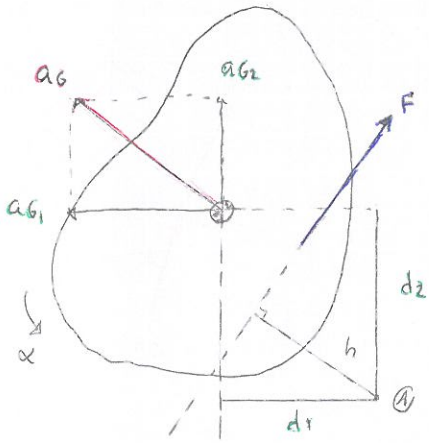
Ex: plant problem & en kraft (administrering av +/-)



(8) $\Rightarrow$ $\curvearrowleft A$: $-Fh = I_G \cdot \alpha + m a_G d\perp$ eller ekvivalent

$\curvearrowright A$: $Fh = I_G(-\alpha) - m a_G d\perp$

Alt: till $m \cdot a_G d\perp$-form: Dela upp a_G i kraftkomposanter

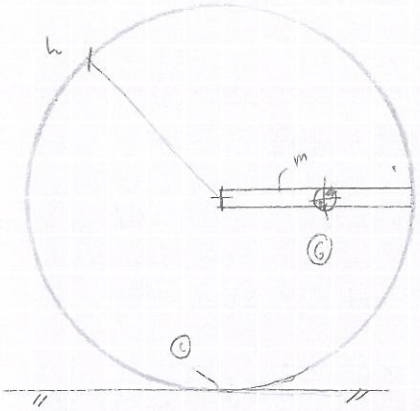


(8) $\Rightarrow$ $\curvearrowleft A$ $-Fh = I_G\alpha + m a_1 d_2 - m a_2 d_1$

eller $\curvearrowright A$ $Fh = I_G(-\alpha) - m a_1 d_2 + m a_2 d_1$

FÖ6: Räkneföreläsning 2

Uppgift 6/83



Givet: m, h, masslös ring. Släpps från vila. Ingen glidning

Bestäm: F_{fr} & N vid $t=0^+$

$E1 \Rightarrow \sum \bar{F} = m\bar{a}_G$

$\rightarrow: \quad -F_{fr} = m \cdot a_{G,x} \qquad (1)$

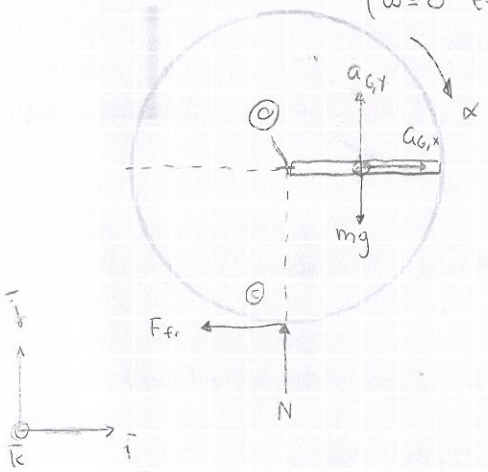
$\uparrow: \quad N - mg = m \cdot a_{G,y} \qquad (2)$

$E2 \Rightarrow \sum \bar{F} = I_G \alpha$

$(\omega = 0 \text{ ty } t = 0^+)$

$\circlearrowright G: \quad F_{fr} \cdot h + N \cdot \frac{h}{2} = I_G \cdot \alpha \qquad (3)$

$\left(\circlearrowright G: \quad mg\frac{h}{2} = I_G \alpha + m a_{G,x} \cdot h - m a_{G,y} \frac{h}{2} \right)$



Kinematik: Låt C vara centrumpunkten för ringen.

Ingen glidning $\Rightarrow$ C är M.C $\Rightarrow$

$\bar{v}_C = \omega h \bar{i}, \ \forall t \Rightarrow \bar{a}_C = \alpha h \bar{i} \qquad (4)$

$\bar{a}_G = \bar{a}_C + \underbrace{\bar{\omega}}_{=0} \times (\underbrace{\bar{\omega}}_{=0 \text{ vid } t=0^+} \times \bar{CG}) + \bar{\alpha} \times \bar{CG} = \bar{a}_C + \bar{\alpha} \times \bar{CG}$

$\therefore \bar{a}_G = \alpha h \bar{i} + \bar{0} + (-\alpha \bar{k}) \times \frac{h}{2} \bar{i} = \underbrace{\alpha h \bar{i}}_{\bar{a}_{G,x} \ (5)} + \underbrace{\left(-\alpha \frac{h}{2}\right) \bar{j}}_{\bar{a}_{G,y} \ (6)}$

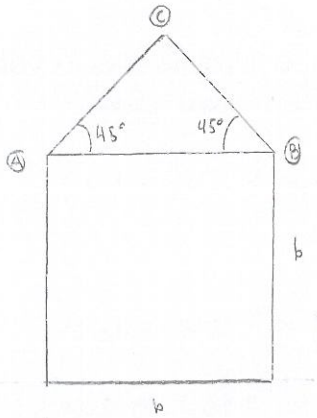
- (5) & (6) i (1) & (2): $\begin{cases} -F_{fr} = m\alpha h & (7) \\ N - mg = -m\alpha \frac{h}{2} & (8) \end{cases}$
- $I_G = \frac{mh^2}{12}$ (table D/4)
- (3): $F_{fr} h + N \frac{h}{2} = \frac{mh^2}{12} \alpha \qquad (9)$

Svar: $N = \frac{13}{16} mg$

$F_{fr} = \frac{-3}{8} mg$

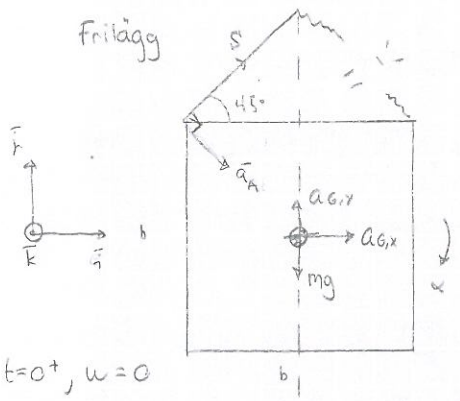
(Alt: Euler II kring C "$M_A = I_G \cdot \alpha \pm m a_{G,d\perp}$")

Uppgift 6/84



Givet: m, b
Bestäm: S vid $t=0^+$

Frilägg



$t=0^+$, $\omega=0$

Ekv I: $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}_G$

$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} S = m \cdot a_{G,x}$ (1)

$\uparrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} S - mg = m \cdot a_{G,y}$ (2)

CBS! Vi vet riktningen på $\bar{a}_A$ & det är användbart. Tecknar moment kring A

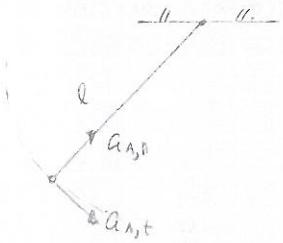
$\Sigma M_A = I_G \alpha \pm m a_G d_\perp$

$\widehat{A}: \quad \frac{mgb}{2} = I_G \alpha - \frac{m a_{Gx} b}{2} - \frac{m a_{Gy} b}{2}$ (3)

Kinematiken

$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AG})}_{=0} + \bar{\alpha} \times \bar{AG}$

Enligt karusellekvationerna vid $t=0$



$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{AG} = a_A \frac{1}{\sqrt{2}} i - a_A \frac{1}{\sqrt{2}} j + (-\alpha \bar{k}) \times (\frac{b}{2} \bar{i} - \frac{b}{2} \bar{j}) =$

$= (a_A \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha b}{2}) i + (-a_A \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha b}{2}) j$

$\therefore \quad a_{Gx} = a_A \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha b}{2}$ & $a_{Gy} = -\frac{\alpha b}{2} - a_A \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4),(5)

Antal obekanta: $S, \alpha, a_A, a_{Gx}, a_{Gy}$
Antal ekv: 5st

(4)(5) i (1)(2)(3) $\Rightarrow$ $S = \sqrt{2} m \left(\frac{1}{\sqrt{2}} a_A - \alpha \frac{b}{2}\right)$ (6)

$S = \sqrt{2} mg + \sqrt{2} m \left(-\frac{1}{2} a_A - \alpha \frac{b}{2}\right)$ (7)

$\frac{mgb}{2} = I_G \alpha - \frac{mb}{2}(-\alpha b)$ (8)

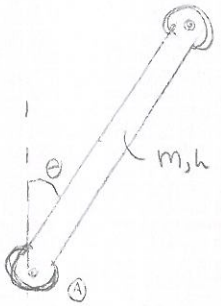
(8) $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{\frac{mgb}{2}}{I_G + \frac{mb^2}{2}} = / \; I_G = \left\{ \begin{matrix} \text{data-} \\ \text{blad} \end{matrix} \right\} = \frac{m}{12}(b^2+b^2) = \frac{mb^2}{6} / = \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{b}$ (9)

(9) i (6) & (7) ger $S = m a_A - \frac{3\sqrt{2}}{8} mg$ (10)

$S = \sqrt{2} mg - m a_A - \frac{3\sqrt{2}}{8} mg$ (11)

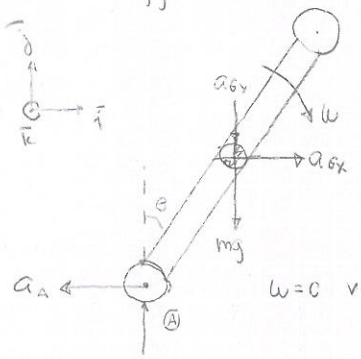
(10)+(11) ger svar: $S = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) mg = \frac{\sqrt{2}}{8} mg$

6.104



Given: $m, h, \theta = 30°$, släpps från vila
Bestäm: N, α vid $t = 0^+$

Frilägg



$\omega = 0$ vid $t = 0^+$

$$\Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a}_G \Rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 0 = m \cdot a_{Gx} \qquad (1)$$

$$\uparrow \quad N - mg = m \cdot a_{Gy} \qquad (2)$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha$$

$$\circlearrowleft \quad N \tfrac{1}{4} h = I_G \alpha \qquad (3)$$

Kinematik

$$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{\omega}}_{=0} \times (\bar{\omega} \times \bar{AG}) + \bar{\alpha} \times \bar{AG} =$$

$$= -a_A \bar{i} + \bar{0} + \alpha \bar{k} \times \left(\tfrac{h}{4} \bar{i} - \tfrac{\sqrt{3}}{4} h \bar{j} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} h\alpha - a_A \right)}_{a_{Gx}} \bar{i} + \underbrace{\alpha \tfrac{h}{4}}_{a_{Gy}} \bar{j}$$

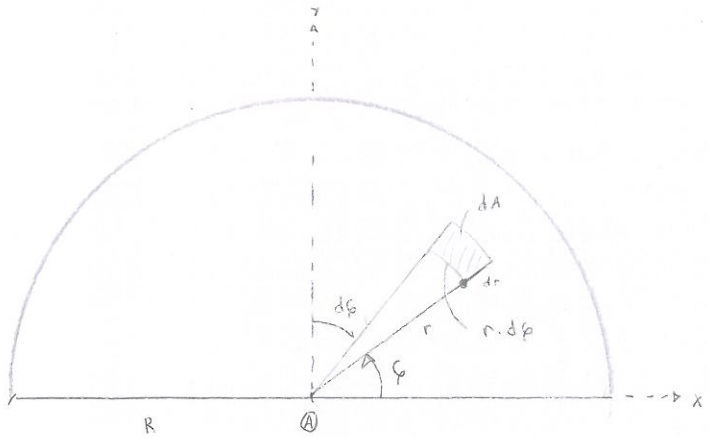
$$\therefore \quad a_{Gx} = \tfrac{\sqrt{3}}{4} h\alpha - a_A \qquad (4)$$

$$a_{Gy} = \alpha \tfrac{h}{4} \qquad (5)$$

$\Rightarrow$ 5 obekanta 5 ekvationer

- (2) & (5) ger $N - mg = \dfrac{m\alpha h}{4}$
- ovan med (3) $\begin{cases} N - mg = \dfrac{m\alpha h}{4} \\ N \dfrac{h}{4} = I_G \alpha \end{cases} \Rightarrow N = \dfrac{mg}{1 + \frac{1}{16} \frac{mh^2}{I_G}} = \left\{ I_G = \dfrac{mh^2}{12} \right\} = \dfrac{4}{7} mg$
- ovan i (3) $\alpha = \dfrac{12}{7} \dfrac{g}{h}$

Ex 1 (B.40) fast med bättre koord. teckningar



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dA = r\,d\varphi\,dr \\ \rho = \dfrac{m}{A} = \dfrac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{m}{R^2} \end{cases}$$

$$I_{A,x,x} = \int (x^2+y^2)\,dm = \iint (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\underbrace{\rho\,dA}_{dm} = \rho\int_0^R\int_0^\pi r^2 r\,dr\,d\varphi = \rho\int_0^R r^3\,dr\int_0^\pi d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{m}{R^2}\frac{R^4}{4}\pi = \frac{1}{2}mR^2$$

Fö 7: Plan kinetik, fixpunkt & rörelseekvation som differentialekvation

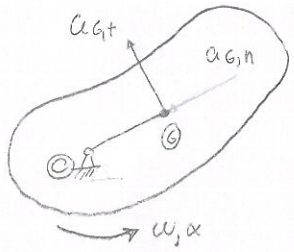
Momentlagen (från fö 4,5)

$\Sigma M_A = I_G \alpha \mp m \cdot a_G d_\perp$ (A: godt punkt) (1)

OBS! Utöver spec. fallet $\Sigma M_G = I_G \alpha$ finns ett ytterligare användbart specialfall

Momentlagen m.a.p en kroppsfast & fix punkt i rummet (Fixpunktsrotation)

Plan rörelse



OBS! $\begin{cases} a_{Gt} = \alpha \cdot d \\ a_{Gn} = \omega^2 d \end{cases}$

Karusellekvationen

(1) ger i detta fall

$\circlearrowleft O$ $\Sigma M_O = I_G \alpha \mp m \cdot a_G d_\perp = \{a_G$ enl elementarfallet$\} =$

$= I_G \alpha + m \cdot a_{G,t} \cdot d + m \cdot a_{Gn} \cdot \underbrace{d_\perp}_{=0} =$

$= I_G \alpha + m \cdot \alpha d \cdot d = (I_G + md^2)\alpha = \{$Steiners sats$\} =$

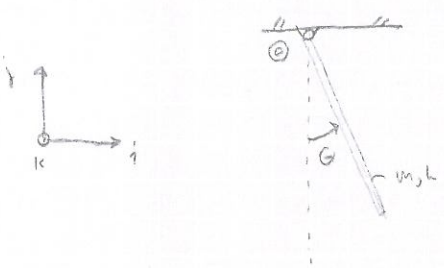
$= I_O \cdot \alpha \iff \boxed{\Sigma M_O = I_O \alpha}$ (2)

Massträgheetsmoment

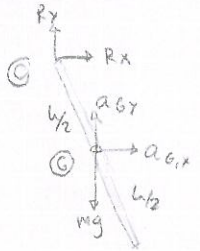
Den "styrande" Differentialekvationen

: Euler 1 & 2 beskriver naturligtvis hela rörelsen, inte bara vid $t = 0^+$ som nytts för att förenkla beräkningar

Ex Pendlande stång: Bestäm D.E. som beskriver rörelsen



$\Rightarrow$ frilägg $\Rightarrow$



I $\Sigma F = m \cdot \bar{a}_G \Rightarrow$

$\rightarrow$ $R_x = m \cdot a_{G,x}$ (3)

$\uparrow$ $R_y - mg = m \cdot a_{Gy}$ (4)

II $\Sigma M_O = I_O \alpha \Rightarrow$

$\circlearrowleft O$: $\frac{L}{2} mg \sin\theta = I_O \ddot{\theta}$ (5)

OBS! positiv riktning för θ

(5) $\Rightarrow$ $\ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{mgL}{I_O} \sin\theta$

- Steiners sats $\Rightarrow$ $I_O = I_G + m|\overline{OG}|^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$

  (5) med I_O ger D.E: $\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta$ + Begynnelsevillkor (6)

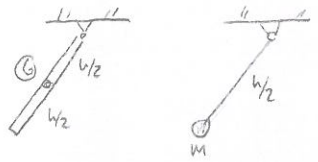
- Begynnelsevillkor: $\theta(t=0) =$ startvinkel
  $\dot{\theta}(t=0) = \omega(0)$

- När vi har lösn $\theta(t)$ till (6) kan a_G beräknas $\Rightarrow$ R_x & R_y i (3) & (4)

Experiment: Pendel (stång) med $L = 1{,}180$ m, $m = 0.396$ kg släpps från vila från $\theta(0) = 10°$

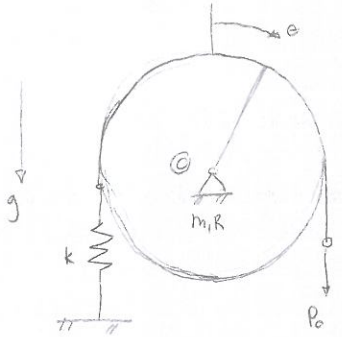
Detta ger (6):
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta & \text{med BV} \\ \theta(0) = 10\frac{\pi}{180} & \text{(rad)} \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

Tid för 10 st svängningar



partikelmodell

	tidt 1	tidt 2
Experiment ger	17,97 s	17.78 s
Matlab & diff.ekv:	17,82 s	
Partikelmodellen ger:	15,4 s	

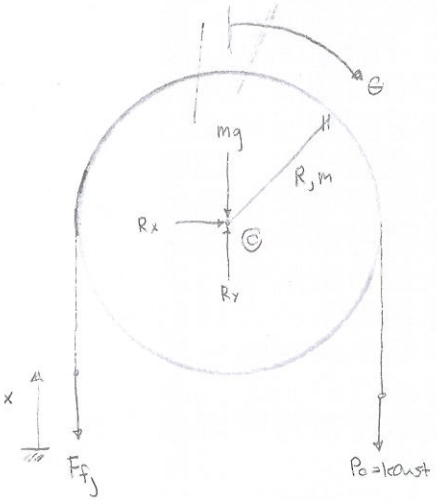


Exempel 9* (a.) Rörelseekvationen uttryckt i θ
(b) Beräkna $\theta(t)$, $\omega(t)$
(c) Beräkna $\omega(\theta)$

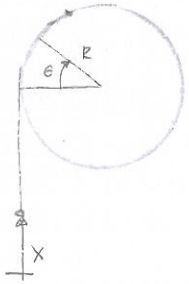
Vid $t_0 = 0$ läggs P_0 på. Då är cylindern i vila & fjädern är spänd.

OBS! Inför hjälpkoordinaten $x = 0$ då $\theta = 0$. I sambandet mellan x & θ

$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow$ ⊙ $P_0 R - F_{fj} R = I_O \ddot{\theta}$ (1), med $F_{fj} = kx$ (2)



Kinematik



Upprullad längd: $x = \theta \cdot R$ (3)

(3) & (2) i (1) $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kR^2}{I_O}\theta = \frac{P_0 R}{I_O}$

BV: $\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$ $\Rightarrow$ tr start från vila

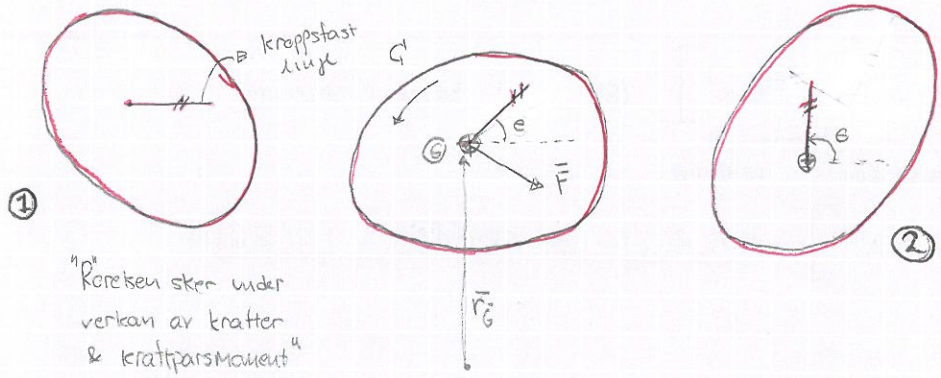
Tabell D7 ger $I_O = \frac{1}{2}mR^2$

$$\left[\begin{array}{l} \therefore \text{ Svar (a)} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k}{m}\theta = \frac{2P_0}{mR} \\ \theta(t=0) = 0 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{array}\right] \quad (5)$$

Fö 8: Arbete & energi

Energiekvationen för en stel kropp

Plan rörelse, från ett läge 1 till 2



"Rörelsen sker under verkan av krafter & kraftparsmoment"

Kraftsystem har reducerats från 1 till G (ekvivalent cr rörelsesynpunkt)

Rörelsen beskrivs av rörelseekvationerna:

$$\begin{cases} \Sigma F = m \cdot \bar{a}_G \\ \Sigma M_G = I_G \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{F} = m\ddot{\bar{r}}_G & (1) \\ C = I_G \ddot{\theta} & (2) \end{cases}$$

OBS! Multiplicera (1) med $\cdot\, d\bar{r}_G$ & (2) med $d\theta$ & addera ekvationerna

$$\therefore \quad (\bar{F} - m\ddot{\bar{r}}_G) \cdot d\bar{r}_G + (C - I_G\ddot{\theta})\, d\theta = 0 \quad (3)$$

Notera om (1) & (2) uppfyllda så gäller (3)

Skriv om $\ddot{\theta}\, d\theta$ & $\ddot{\bar{r}}_G \cdot d\bar{r}_G$ med kedjeregeln

- $\ddot{\theta}\, d\theta \Rightarrow \ddot{\theta}\, d\theta = \omega\, d\omega$ (4)
- $\ddot{\bar{r}}_G \cdot d\bar{r}_G = \bar{a}_G \cdot d\bar{r}_G = \frac{d\bar{v}_G}{dt} \cdot d\bar{r}_G = d\bar{v}_G \cdot \bar{v}_G$ (5)

Sätt nu in (4)(5) i (3) & integrera från 1 till 2

$$\int_1^2 \bar{F}\, d\bar{r}_G + \int_1^2 C\, d\theta = \int_1^2 m\bar{v}_G + d\bar{v}_G + \int_1^2 I_G \omega\, d\omega \quad (6)$$

VL i (6) är det totala arbetet som krafterna & kraftparsmomenten på kroppen uträttar, U_{tot}

Utvecklar HL i (6) till $U_{tot} = \left[m \cdot \frac{1}{2} \bar{v}_G \cdot \bar{v}_G \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} I_G \omega^2 \right]_1^2$ (7)

$\Leftrightarrow$ $U_{tot} = T_2 - T_1$ därför införs <u>definitionen</u>

$$\left[T = \underbrace{\frac{1}{2} m \overbrace{\bar{v}_G \cdot \bar{v}_G}^{v_G^2}}_{\text{pga translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_G \omega^2}_{\text{rotation}} \right] \quad (8)$$

T kallas rörelseenergi

(9) $\left[U_{tot} = T_2 - T_1 = \Delta T \right]$ ← <u>LAGEN OM KINETISKA ENERGIN</u>

OBS! 1: (9) innehåller ingen ny information utöver (1) & (2)
2: Gäller <u>alltid</u> (även om friktion förekommer)

<u>Effekt</u> <u>Def</u>: $P = \frac{dU}{dt}$ U = arbete, "time rate of doing work

$\downarrow$
power

$(\Rightarrow = \int dU = \int P dt \Rightarrow U = \int P dt)$

Kraft $\bar{F}$:

$\bar{F}$:s arbete: $dU_F = \bar{F} d\bar{r}$

$\bar{F}$:s effekt: $P_F = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$

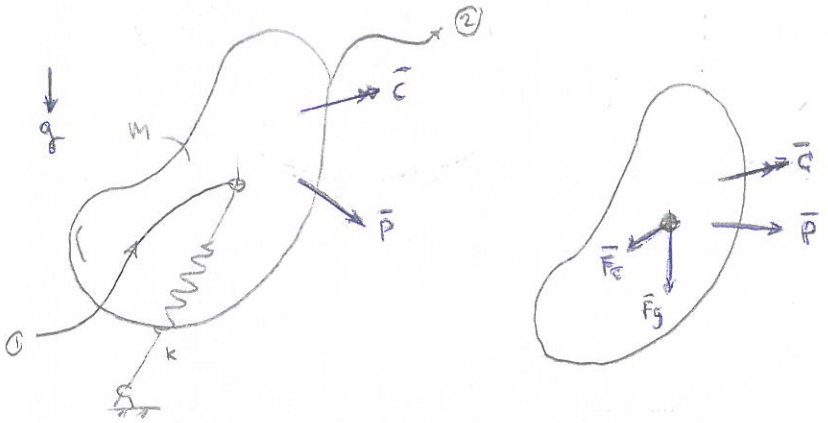
Kraftparsmoment $\bar{C}$:

$\bar{C}$:s arbete: $dU_C = C d\theta$

$\bar{C}$:s effekt: $P_C = \frac{C d\theta}{dt} = C\dot{\theta} = C\omega$ Allmänt $(P_C = \bar{C} \cdot \bar{\omega})$

Energiekvationen (Energibalans)

En stel kropp som rör sig under påverkan av tyngdkraften $\bar{F}_g$, En fjäderkraft $\bar{F}_e$ & "övriga krafter $\bar{P}$ & $\bar{C}$:



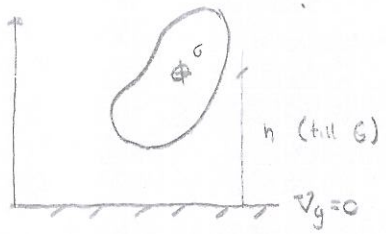
(9.) ger $\Rightarrow$ $U_{tot} = \Delta T = T_2 - T_1$ (10)

Totala arbetet består av $U_{tot} = \underbrace{U_g}_{\text{tyngdkrafts-arbete}} + \overset{\text{fjäderkrafteus arbete}}{U_e} + \underbrace{U'}_{\text{övriga krafters arbete}}$ (12)

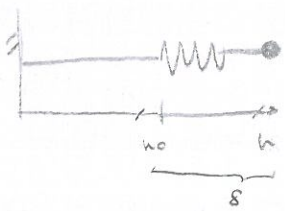
$\Rightarrow$ P & C: s sammanlagda arbete

$\bar{F}_g$ & $\bar{F}_e$ är konservativa (dvs U_G & U_e är vägoberoende) & kan beräknas med potentialen.

- $U_g = -(V_{g2} - V_{g1}) = -\Delta V_G$ där $V_g = mgh$ (13)



- $U_e = -\Delta V_e$ där $V_e = \frac{1}{2} k (h - h_0)^2 = \frac{1}{2} k \delta^2$ (14)



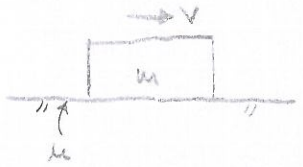
(12)(11)(13)(14) ger $U_g + U_e + U' = \Delta T \Leftrightarrow U' = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

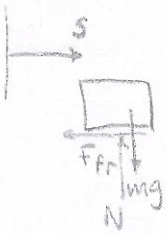
- U' kommer att kallas Övriga krafters arbete
- Övriga krafter kan skrivas ΔE där E är mekaniska energin

Friktionskraftens arbete

Icke konservativ kraft

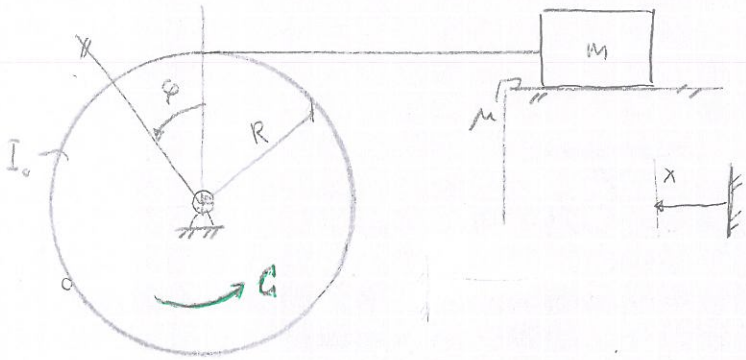
Ex





- F_{fr} uträttar arbete vid glidning (inte annars!)
- Vi ser i (15) blir $U' = -F_{fr} \cdot s = -\mu mgs$

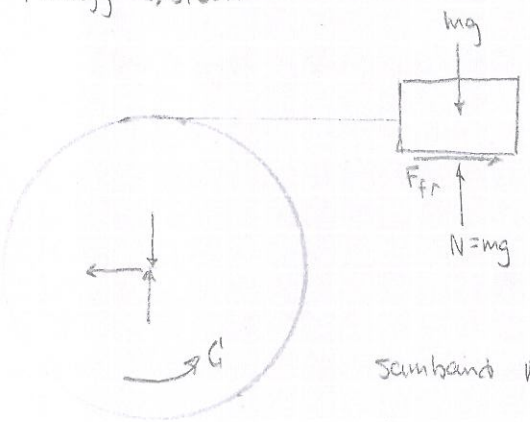
Exempel System av kroppar



Kraftparsmoment vrider trumman så att m glider. Start från vila
Beräkna lådans fart
start från avstånd x ; $\dot{x}(x)$

$$x = R\varphi \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\varphi} \quad (5)$$

Frilägg system



Glidning $\Rightarrow$ $F_{fr} = \mu N$ (1)

Energiekv från systemet

$$U' = \Delta T + \underbrace{\Delta V_g}_{=0} + \underbrace{V_e}_{=0} \quad (2)$$

Samband mellan hjälpvinkel φ & x. $\varphi = 0$ då $x = 0$

$$U' = -F_{fr}x + G\varphi \quad (3)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 - 0 \quad (4)$$

(2) med (1)(3)(4)(5)

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2R(G - \mu mgR)}{I_0 + mR^2}\,x}$$

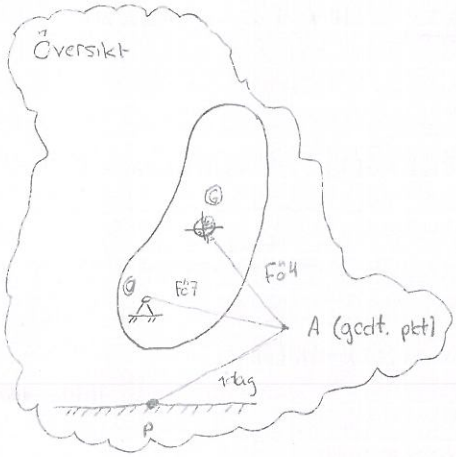
Fö 9:

Impulslagarna

Förberedelse: Inför kommande tillämpningar (stötar) av impulslagarna behöver vi

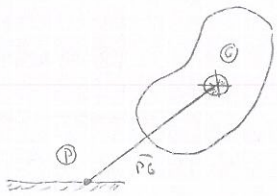
(A) EII m.a.p en fix punkt i rummet

Fås genom att specialisera EII:a m.a.p godt. punkt "$\Sigma M_A = I_G \alpha \pm m \cdot a_G \cdot d_\perp$"



(B): 2D-versionen av förflyttningsregeln för $\bar{H}$ (för 3D, se fö 5)

(A): EII m.a.p fix punkt i rummet (3D)



Vi har EI, EII & förflyttningsregler

$$\begin{cases} \Sigma \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G & (1) \\ \Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a}_G & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma \bar{M}_P = \Sigma \bar{M}_G + \bar{PG} \times \Sigma \bar{F} & (3) \\ \bar{H}_P = \bar{H}_G + \bar{PG} \times m \bar{v}_G & (4) \end{cases}$$

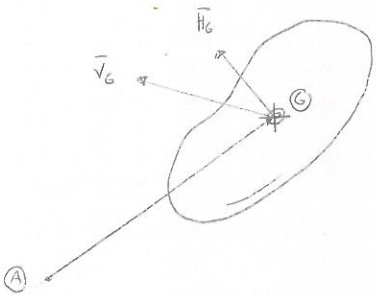
(1) med (3),(4) $\Rightarrow$ $\Sigma \bar{M}_P - \bar{PG} \times \Sigma \bar{F} = \frac{d}{dt}\left[\bar{H}_P - \bar{PG} \times m \bar{v}_G\right] = \dot{\bar{H}}_P - \underbrace{\dot{\bar{PG}}}_{=\bar{v}_G} \times m \bar{v}_G - \bar{PG} \times \underbrace{m \bar{a}_G}_{\Sigma \bar{F}} =$

$= \dot{\bar{H}}_P - \bar{0} - \bar{PG} \times \Sigma \bar{F} \Leftrightarrow \Sigma \bar{M}_P - \bar{PG} \times \Sigma \bar{F} = \dot{\bar{H}}_P - \bar{PG} \times \Sigma \bar{F}$

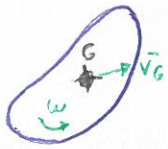
$\therefore$ $\left[\Sigma \bar{M}_P = \dot{\bar{H}}_P\right]$ $\Leftarrow$ Används endast vid stötfal

(B) Förflyttningsregler för $\bar{H}$, se fö 5.

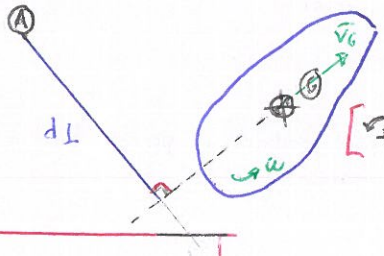
$\bar{H}_A = \bar{H}_G + \bar{AG} \times m \bar{v}_G$ (3D) (eul det: $\bar{H}_A = \int_\Omega \bar{r} \times \bar{v}\, dm$)



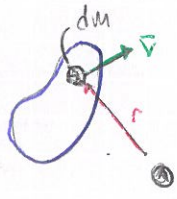
Plant fall



$\circlearrowleft +$: $H_G = I_G \omega$



$\left[\circlearrowleft + \; H_A = H_G + m v_G d_\perp\right]$



$\therefore$

A $\Rightarrow$ $\Sigma M_P = \dot{\bar{H}}_P$

B $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{"2D"}: & H_A = H_G \pm m v_G d_\perp \\ \text{"3D"}: & H_A = H_G + \bar{AG} \times m \bar{v}_G \end{cases}$

M.a.p vilka punkter kan man skriva H som "$H = I\omega$"?

<u>Svar</u>: Man kan visa att (överkurs) detta är möjligt b.l.a m.a.p

1) G: $H_G = I_G \cdot \omega$
2) O: $H_O = I_O \omega$ (O är kroppstast <u>och</u> fix i rummet)

Använd $H_A = I_G \omega \pm m v_G d_\perp$ för andra punkter. <u>OBS!</u> $H \neq I\omega$ i allmänhet

<u>Impulslagarna (2D)</u> $\sum \bar{F} = \dot{\bar{G}} \Rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sum \bar{F}\, dt}_{h = \text{impuls}} = \bar{G}(t_2) - \bar{G}(t_1)$ (impulsekvationen)

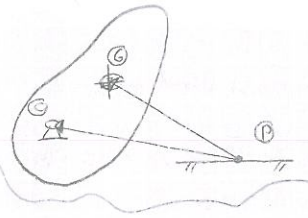
I fonts $t_2 = 2$ & $t_1 = 1$

Från tidigare

$\sum M_* = \dot{H}_*$, $* = G, O, P$

Om $* = G$ eller O $\Rightarrow$ $H_* = I_* \omega$

Om $* = P$ $\Rightarrow$ $H_P = I_G \omega \pm m v_G d_\perp$

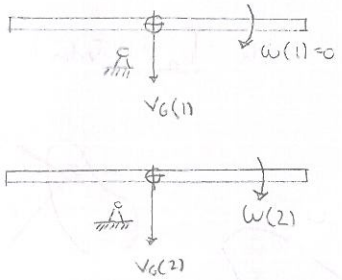


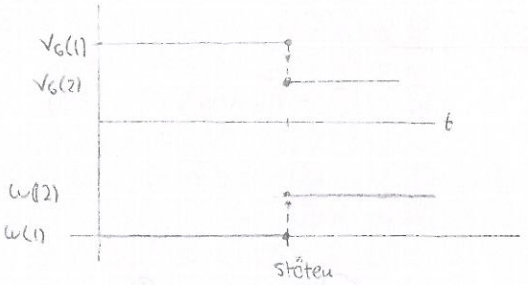
$\underbrace{\int_1^2 \sum M_* \, dt}_{\bar{A} = \text{impulsmoment}} = H_*(2) - H_*(1)$

Vi använder impulslagarna för att lösa stötproblem!
6 egenskaper hos stötar följer:

(1) Vid en stöt betraktas alla hastighetsändringar som momentana, dvs "stöttiden $\to 0$"

Ex Stång som träffar ett stöd



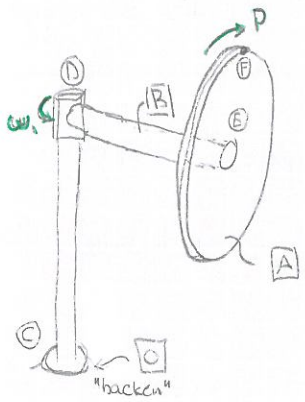


(2) Om vi vet rörelsetillstånd precis före stöten, så kan vi beräkna rörelsetillstånd precis efter stöten med impulslagarna.

Fö 10: Kinematik i 3D

Kinematik (3D)

Typiskt problem



Två kroppar som rör sig; skivan $\boxed{A}$ & axeln $\boxed{B}$. Skivan roterar kring, relativt axeln $\boxed{B}$, med vinkelhastighet p (= spin, även ω_s). Axeln $\boxed{B}$ roterar kring $\boxed{O}$ med ω_1 (relativt fix referens $\boxed{O}$).
Antag nu att vi söker $\bar{a}_F$:

$$\bar{a}_F = \bar{a}_E + \bar{\omega}_A \times (\bar{\omega}_A \times \bar{EF}) + \underbrace{\dot{\bar{\omega}}_A}_{\alpha_A} \times \bar{EF}$$

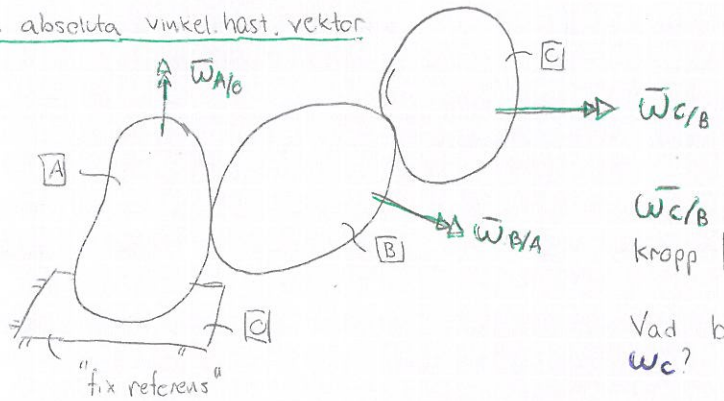
Vi behöver alltså teckna skivans vinkelhastighet ω_A. OBS! Den absoluta, dvs "relativt "backen""

Frågor: 1) $\bar{\omega}_A = ?$ (som funktion av $\bar{p}$ & $\bar{\omega}_1$)?

2.) Hur ska vi representera $\bar{\omega}_A$? Dvs som i komponenter i vilket koord./bas-vektor/-system. Fixt eller rörligt? (Rörligt)

3.) Hur ska vi beräkna $\dot{\bar{\omega}}_A$ om vi väljer ett rörligt koordinatsystem

En kropps absoluta vinkel. hast. vektor



$\bar{\omega}_{C/B}$ är en kropp $\boxed{C}$:s vinkelhast. relativt kropp $\boxed{B}$.

Vad blir kropp $\boxed{C}$:s absoluta vinkelhastighet ω_C?

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_{C/O} = \bar{\omega}_{C/B} + \bar{\omega}_{B/A} + \underbrace{\bar{\omega}_{A/O}}_{\bar{\omega}_A}$$

Åter typexempel

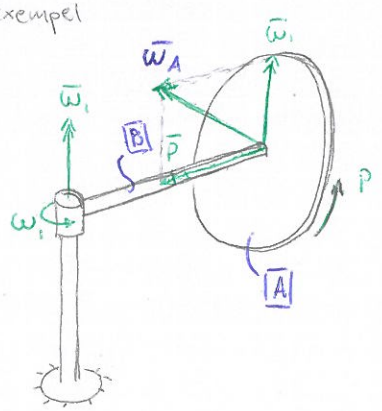
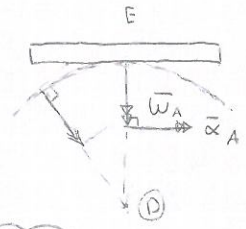


Illustration ger $\omega_A = \omega_{A/O} = \bar{\omega}_{A/B} + \bar{\omega}_{B/O} = \bar{p} + \bar{\omega}_1$

ω_A: skivan relativt backen; $\bar{\omega}_{A/B}$: skivan relativt axeln; $\bar{\omega}_{B/O}$: axeln rel backen

Frågan: Om ω_1 & p båda är konstanta ($\Rightarrow |\omega_A| = \text{konst}$) är då $\bar{\omega}_A = \bar{c}$?
Svar: Nej! $\bar{\omega}_A$ ändrar riktning!

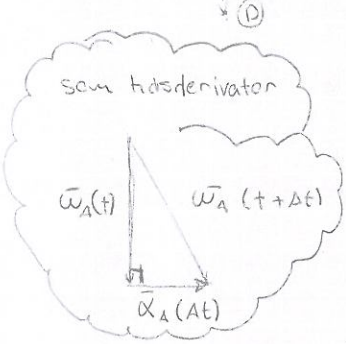
Vy uppifrån (i "DC-led"

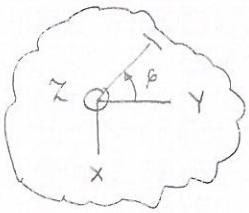


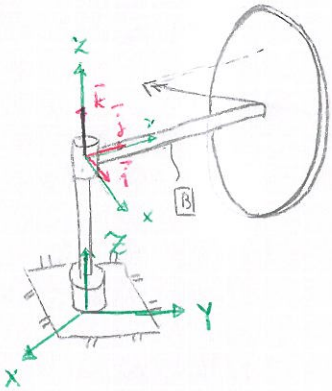
$\bar{\omega}_A$ ändrar riktning $\Rightarrow$ $\bar{\alpha}_A \neq 0$ & riktad enl figur

Hur ska vi representera $\bar{\omega}(t)$?

Åter exemplet: För att kunna derivera $\bar{\omega}_A$ m.a.p tiden så måste vi teckna $\bar{\omega}_A(t)$.

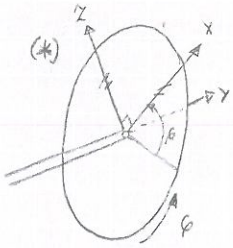






Alt 1: Representera $\bar{\omega}_A$ i ett fixt koord.system X, Y, Z. Krångligt (måste införa hjälpvinkel för att beskriva $\bar{\omega}_A$

Alt 2: För in ett fast system X, Y, Z som följer med skivan. Krångligt p.s.s som ovan. (*)



Alt 3: För in ett rörligt system X, Y, Z som följer med armen men som ej deltar i p-rotation dvs. $Z \parallel z$

$$\Rightarrow \quad \bar{\omega}_A(t) = -p\,\bar{j} + \omega_1 \bar{k} \quad \forall t \quad (*)_2$$

"Den absoluta vinkelhastigheten (dvs mätt relativt en fix referens = "backen") & representerat i ett roterande koord. system

Vinkelacceleration blir:

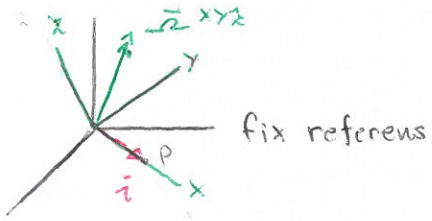
$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \dot{\bar{\omega}}_A = -\dot{p}\,\bar{j} + \dot{\omega}_1 \bar{k} - p\,\dot{\bar{j}} + \omega_1 \dot{\bar{k}} \qquad \Leftrightarrow (\dot{\bar{j}} \neq 0,\ \dot{\bar{i}} \neq 0,\ \dot{\bar{k}} \neq 0)$$

Derivering av en vektor representerad i ett rörligt system kommer att göras med:

Coriolis ekvation

Coriolis ekvation:

Vad blir $\dot{\bar{i}}$ etc?



$$\dot{\bar{i}} = \bar{V}_P = \bar{C} + \bar{\Omega}^{xyz} \times \bar{OP} = \bar{\Omega}^{xyz} \times \bar{i}$$

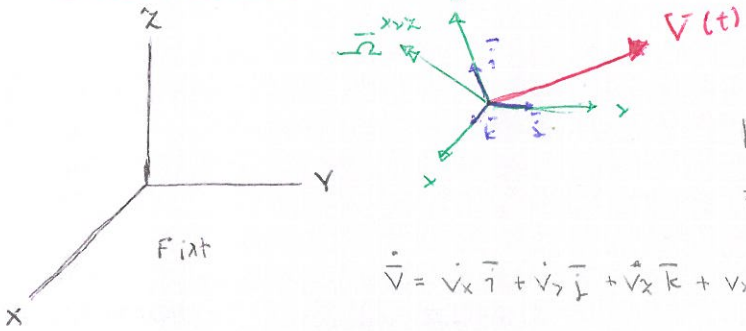
$$\dot{\bar{j}} = \bar{\Omega}^{xyz} \times \bar{j}$$

$$\dot{\bar{k}} = \bar{\Omega}^{xyz} \times \bar{k}$$

$\therefore \dot{\bar{i}} \perp \bar{i}$

xyz roterar med vinkelhastighet $\bar{\Omega}$

Coriolis ekvation



$\dot{\bar{V}} = ?$

Representera $\bar{V}$ i rörligt koordinatsystem xyz

$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}$. Derivera!

$$\dot{\bar{V}} = \dot{V}_x\bar{i} + \dot{V}_y\bar{j} + \dot{V}_z\bar{k} + V_x\dot{\bar{i}} + V_y\dot{\bar{j}} + V_z\dot{\bar{k}} = \{\dot{\bar{i}} = \bar{\Omega} \times \bar{i}\}$$

$$= \underbrace{\dot{V}_x\bar{i} + \dot{V}_y\bar{j} + \dot{V}_z\bar{k}}_{=\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{/xyz}} + \bar{\Omega} \times \bar{V}$$

Coriolis ekvation

$$\dot{\bar{V}} = \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{/fixt} = \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega} \times \bar{V}$$

$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{/xyz}$ är tidsderivatan betraktad från det rörliga systemet

Åter till typexemplet

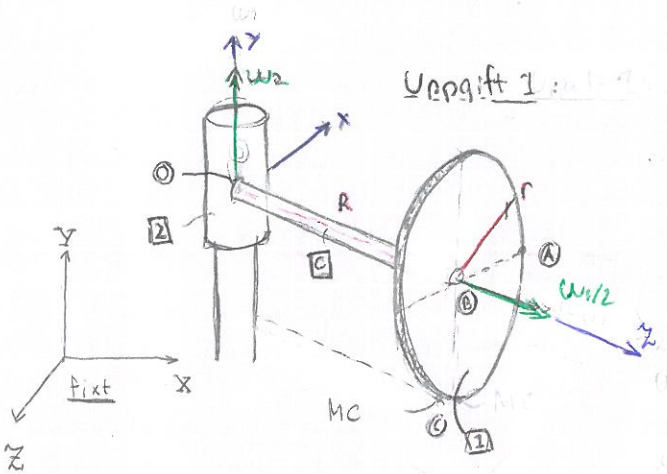
$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_B = \omega_1\bar{k}$ ty xyz sitter fast i kropp $\boxed{B}$

$\bar{\omega}_A = -p\bar{j} + \omega_1\bar{k}$

$$\dot{\bar{\omega}}_A = \left(\frac{d\bar{\omega}_A}{dt}\right)_{/xyz} + \Omega \times \bar{\omega}_A = -\dot{p}\bar{j} + \dot{\omega}_1\bar{k} + \omega\bar{k} \times (-p\bar{j} + \omega_1\bar{k}) =$$

$$= \underbrace{-\dot{p}\bar{j} + \omega_1\bar{k}}_{\text{p.g.a att } |\omega_A| \text{ ändras}} + \underbrace{\omega_1 p\bar{i}}_{\text{p.g.a } \omega_1 \text{ ändrar riktning}}$$

Fö 11: Räkneföreläsning 3



"rullar utan glidning"
⇒ MC för $\boxed{1}$ i C

Uppgift 1:

Givet: R, r, varvtid τ (för system kring y-axel)
konst hastigheter, "rullar utan glidning"

Bestäm: a.) Vinkelacceleration för skivan $\boxed{1}$ ($\bar{\alpha}_1$)

(b.) $\bar{a}_A$

$\bar{\omega}_2$ given indirekt via varvtid $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau}$

- Samband mellan relativa hastigheter ger absoluta $\bar{\omega}_1$
  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1/2} + \bar{\omega}_{2/C}$
- Inför xyz fast i "pinnen" så att y-axeln ständigt pekar upp & z inbäddad i $\boxed{C}$. Vi får att:

$$\bar{\omega}_1 = \omega_{1/2}\,\bar{k} + \omega_2\,\bar{j}$$

∃ ett samband mellan $\omega_{1/2}$ & ω_2 & ω_2 är "given". Utnyttja kropparnas kinetik & punkten B där delsystemen har samma hastighet:

$\boxed{1}$ $\quad \bar{V}_B = \underbrace{\bar{V}_C}_{=0 \text{ ty MC}} + \bar{\omega}_1 \times \bar{CB}$ (4)

$\boxed{C}$ $\quad V_B = \underbrace{\bar{V}_C}_{=0 \text{ ty fix}} + \omega_2 \times \bar{CB}$ (5)

Vi utnyttjar att (4) ⟺ (5) så att:

$$(4)\quad \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_{1/2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega_{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{1/2} = -\omega_2 \frac{R}{r} \quad (6)$$

(3) med (6) ⇒ $\bar{\omega}_1 = \omega_2 \bar{j} - \omega_2 \frac{R}{r} \bar{k}, \ \forall t$ (7)

Deriveta med Coriolis ekvation: $\bar{\alpha}_1 = \left(\frac{d\bar{\omega}_1}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)_{xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{\omega}_1$ (8)

$\bar{\Omega}_1 = \bar{\omega}_2$ ty rotation kring y-axel & xyz fast i $\boxed{C}$

$$\therefore \quad \bar{\alpha}_1 = \underbrace{\dot{\omega}_2}_{=0} \bar{j} - \underbrace{\dot{\omega}_2}_{=0} \frac{R}{r} \bar{k} + \omega_2 \bar{j} \times \bar{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ -\omega_2 \frac{R}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_2^2 \frac{R}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

(9.) med (1) ⇒ $\bar{\alpha}_1 = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \frac{R}{r} \bar{i}$ (10)

(b) $\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{BA}) + \bar{\alpha}_1 \times \bar{BA}$ (11)

$\bar{a}_B = \{\text{cirkel-rörelse, fix}\} = -\omega_2^2 R \bar{k}$ (12)

(11)(12) $\Rightarrow$ $\{\text{kryssning}\} \Rightarrow$ $\bar{a}_A = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \left[\left(\frac{h^2}{r} + r\right)\bar{i} + R\bar{k}\right]$

Alt:
$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \ldots$

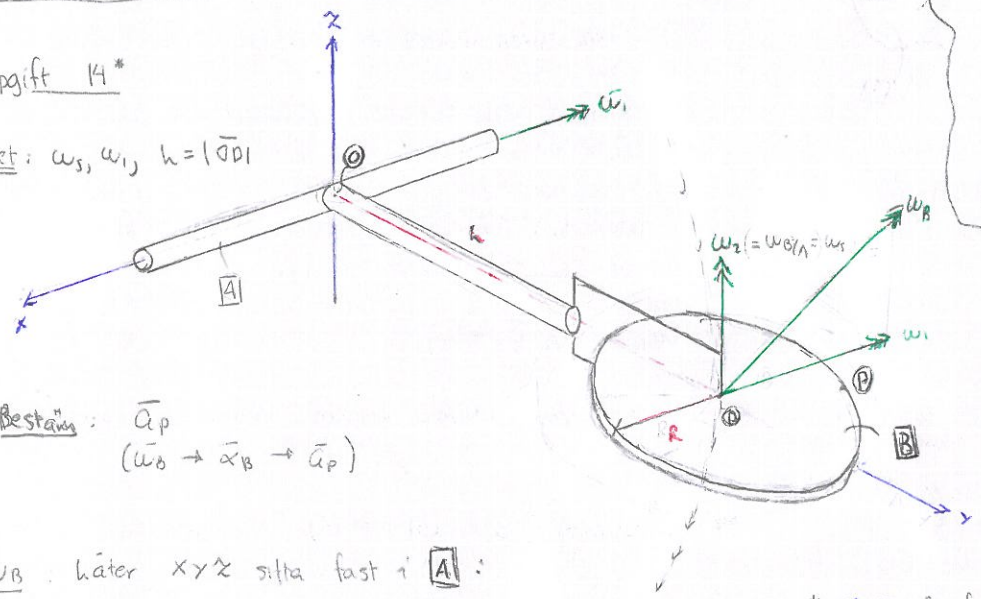
$\boxed{1}$ rör sig kring pkt ⓞ som om ⓞ vore en punkt i kropp $\boxed{1}$.

MAO $\boxed{1}$:s rörelse ändras ej om navet flyttas till ⓞ

$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{OA}) + \bar{\alpha}_1 \times \bar{OA}$

Uppgift 14*

Givet: $\omega_s, \omega_1, h = |\bar{OD}|$



Bestäm: $\bar{a}_P$
$(\bar{\omega}_B \to \bar{\alpha}_B \to \bar{a}_P)$

ω_B låter XYZ sitta fast i $\boxed{A}$:

$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_{B/A} + \bar{\omega}_A = \omega_s \bar{k} - \omega_1 \bar{i}$, $\forall t$ (1)

Deriverar med Coriolis ekv!

$\bar{\alpha}_B = \left(\frac{d\bar{\omega}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\bar{\omega}_B}{dt}\right)_{xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{\omega}_B$ (2)

enligt (*) har vi dessutom $\bar{\Omega}_{xyz} = -\omega_1 \bar{i}$

* xyz är fixt i ⓞ längs x-axeln
Relativt ett fixt system XYZ snurrar xyz med vinkelhastighet ω_1.

$\therefore$ $\bar{\Omega}_{xyz} = -\omega_1 \bar{i}$

(1)(3) i (2) $\Rightarrow$ $\bar{\alpha}_B = \underbrace{\dot{\omega}_s \bar{k} - \dot{\omega}_1 \bar{i}}_{\bar{\omega}_B = \text{konstant } \forall t \Rightarrow \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{xyz} = 0} + (-\omega_1 \bar{i}) \times (\omega_s \bar{k} - \omega_1 \bar{i}) = \omega_1 \omega_s \bar{j}$ (4)

$\bar{a}_P = \bar{a}_D + \bar{\omega}_B \times (\bar{\omega}_B \times \bar{DP}) + \bar{\alpha}_B \times \bar{DP}$ (5)

ⓓ rör sig i en cirkel kring ⓞ med $|\bar{OD}| = h$ = konstant. Karusellekvation ger $\bar{a}_D = -\omega_1^2 h \bar{j}$ (6)

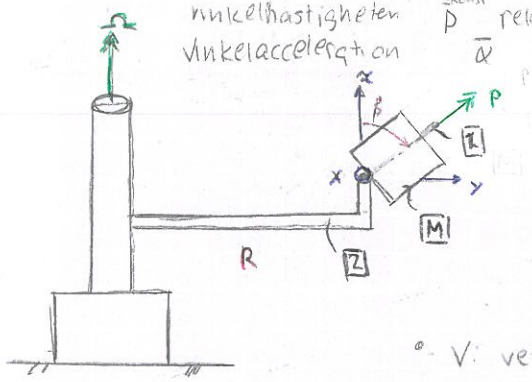
(5) med (6)(1)(4) & $\bar{DP} = -R\bar{i}$

$\Rightarrow$ $\bar{a}_P = \{\text{kryssning}\} = \omega_s^2 R \bar{i} - \omega_1^2 h \bar{j} + 2\omega_1 \omega_s R \bar{k}$

"absoluta (relativt fix referens; ex "backen") acceleration vektorn för kropp $\boxed{B}$ i p representerad i ett fixt koordinatsystem"

Uppgift 7/36

En motor M monterad i en plattform som roterar med konstant vinkelhastighet Ω. Motorn roterar kring k-axel med konstant vinkelhastighet $\dot{\beta}$ relativt plattform. Motorns axel OA roterar med vinkelhastigheten $\overset{=konst}{p}$ relativt motorn. Beräkna axelns vinkelacceleration $\bar{\alpha}$ som funktion av vinkeln β



Givet p=konst, Ω=konstant, $\dot{\beta}$ = konstant

Bestäm: $\bar{\alpha}_1(\beta)$

• Vi vet att $\bar{\omega}_{1/0} = \bar{\omega}_{1/M} + \bar{\omega}_{M/2} + \bar{\omega}_{2/0}$ (1)

relativt backen

• Låt xyz-system sitta fast i [2] enligt bild. [M] & [I]:s vinkelhastighet inte konstant map xyz!

$\omega_{1/M}$ beror på vinkeln β så komposantuppdelning krävs: $\bar{\omega}_{1/M} = \bar{p}(\sin\beta\,\bar{j} + \cos\beta\,\bar{k})$

$\omega_{M/2}$ beror på $\frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} > 0$; $\omega_{M/2} = -\dot{\beta}\,\bar{i}$

$\bar{\omega}_2 = \Omega\bar{k}$

ω_1 är resultanten!

ins i (1) $\Rightarrow$ $\bar{\omega}_1 = -\dot{\beta}\bar{i} + p\sin\beta\,\bar{j} + (p\cos\beta + \Omega)\bar{k}$, $\forall t$ (2)

Derivera (2) med Coriolis Ekv

($\bar{\Omega}_{xyz} = \bar{\omega}_{2} = \Omega\bar{k}$ ty xyz sitter fast i [2])

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}_1}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{\omega}_1 = \{\beta = \beta(t)\} =$$

$$= -\ddot{\beta}\,\bar{i} + (\dot{p}\sin\beta + \dot{\beta}\cos(\beta)p)\,\bar{j} + (\dot{p}\cos\beta - \dot{\beta}p\sin(\beta) + \dot{\Omega})\bar{k} + \Omega\bar{k} \times [-\dot{\beta}\,i + p\sin\beta\,\bar{j} + (p\cos\beta + \Omega)\bar{k}]$$

$$= \left\{\begin{matrix}\ddot{\beta} = 0 \\ \dot{p} = 0\end{matrix}\right\} = \quad = p\dot{\beta}\cos\beta\,\bar{j} - p\sin\beta\,\dot{\beta}\,\bar{k} + [-\Omega\dot{\beta}\,\bar{j} - \Omega p\sin\beta\,\bar{i}] \Rightarrow$$

$$\alpha(\beta) = \begin{pmatrix} -\Omega p\sin\beta \\ \dot{\beta}(p\cos\beta - \Omega) \\ -p\dot{\beta}\sin\beta \end{pmatrix} = \text{svaret}$$

OBS! Räkna 17 & 12

Föl 12: 3D-Kinetik

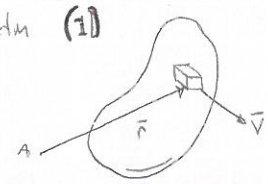
Rörelselagar - 3D

$$\sum \bar{F} = m \cdot a_G$$
$$\sum \bar{M}_* = \dot{\bar{H}}_* \quad , \quad * = G, O, P$$ (de punkter vi kommer att använda i 3D-problem)

$\bar{H}$-vektorn

<u>Def</u> Rörelsemängdsmoment med avseende på godtyckig punkt A är: $H_A = \int \bar{r} \times \bar{v} \, dm$

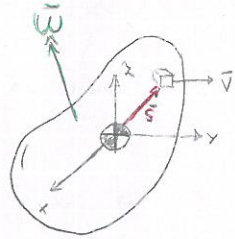
$$\bar{H}_G = \int \bar{s} \times \bar{v} \, dm = \int \bar{s} \times (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s}) \, dm = \left\{ \int \bar{s} \, dm = \bar{0} \right\} = \int \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s}) \, dm \quad (1)$$



Inför ett koord.system. Vektorerna kan representeras enl:

$$\left.\begin{aligned} \bar{s} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \bar{\omega} &= \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \\ \bar{H}_G &= H_x \bar{i} + H_y \bar{j} + H_z \bar{k} \end{aligned}\right\}$$ Ins i (1) & komponentvis identifikation ger H_G:s komponenter

$\bar{H}_G$:



$$H_{G,x} = \omega_x \cdot \int (y^2 + z^2) \, dm - \omega_y \cdot \int xy \, dm - \omega_z \int xz \, dm$$

$$H_{G,y} = -\omega_x \cdot \int yx \, dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) \, dm - \omega_z \cdot \int yz \, dm$$

$$H_{G,z} = -\omega_x \cdot \int zx \, dm - \omega_y \cdot \int zy \, dm + \omega_z \cdot \int (x^2 + y^2) \, dm$$ gammal bekant

Vi känner igen de "diagonala" termerna. De är masströghetsmomenten kring en axel genom G riktad i x-, y- & z-led. Dessa skrivs

$$\left[I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm \quad , \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \, dm \quad , \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm \right]$$

"Nykomlingarna" kallas <u>tröghetsprodukter</u>: $I_{xy} = \int xy \, dm$, $I_{zx} = \int zx \, dm$

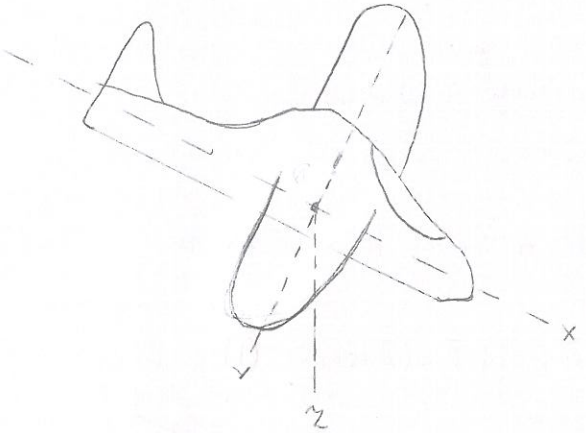
CBS! $I_{zx} = I_{xz}$

(1) Kan således skrivas
$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \underset{\text{CBS!}}{\Leftrightarrow} \bar{H}_G = \bar{I}_G \, \bar{\omega}$$

$\bar{I}$ kallas tröghetsmatrisen (m.a.p G) & är symmetrisk <u>(alltid)</u>

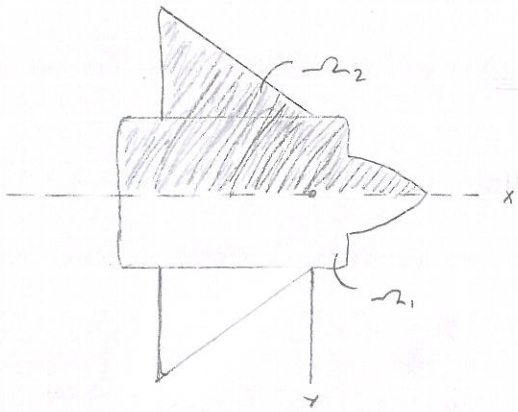
P.s.s gäller $\bar{H}_O = \bar{I}_O \, \bar{\omega}$

Tröghetsmatrisen för symmetriska kroppar



Om ett symmetriplan:

Antag att flygplanet är symmetriskt m.a.p xz-planet



$$I_{A,xy} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} xy\,dm = \int_{\Omega_1} xy\,dm + \int_{\Omega_2} xy\,dm =$$

$$= \{\text{symmetri} \Rightarrow \int_{\Omega_2} xy\,dm = \int_{\Omega_1} x(-y)\,dm = -\int_{\Omega_1} xy\,dm$$

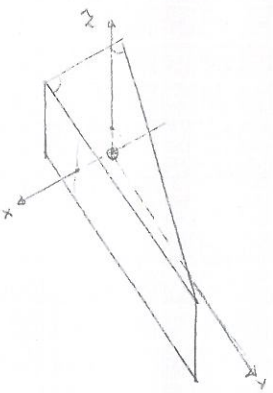
ty $\Omega_1 = \Omega_2$ om tecknet byts på y-koordinat

$I_{A,xy} = 0 \Rightarrow$ lungrar p.s.s, således fås: $\bar{I}_A = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

Vi inför följande allmäna regel

Symmetri.plan map. referenspunkten	Tröghetsprodukter som blir noll
xz {y}	I_{xy} I_{zy}
xy {z}	I_{zx} I_{zy}
zy {x}	I_{xy} I_{xz}

Ex två symmetriplan



yz-planet är ett symm.plan m.a.p G: $I_{G,xy} = I_{G,xz} = 0$

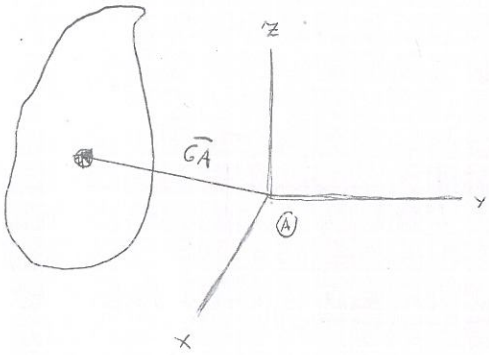
xy-planet är ett symm.plan m.a.p G: $I_{G,zx} = I_{G,zy} = 0$

$$\bar{I}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Ex klot

$$\Rightarrow \quad I_G = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Steiners sats för hela tröghetsmatrisen



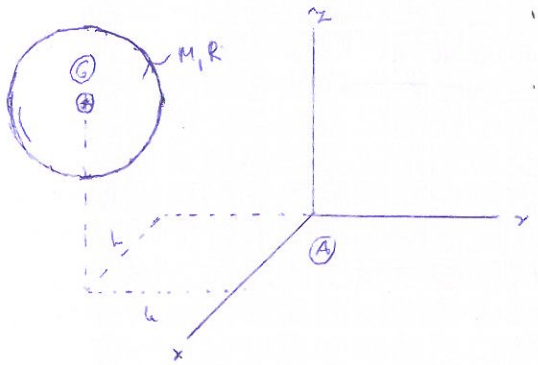
$$\overline{GA} = d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}$$

$$\bar{I}_A = \bar{I}_G + m \begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix}$$

, där diagonalen motsvarar d^2

OBS! d_x, d_y & d_z har tecken som ges av $\overline{GA}$

Exempel: klot, bestäm $\bar{I}_A$!



I_G: Ett xy-plan genom G är ett symm.plan

$\Rightarrow I_{G,zx} = I_{G,zy} = 0$

p.s.s ett symmetriplan xz- & yz-plan

$\Rightarrow \because \bar{I}_G$ är diagonal!

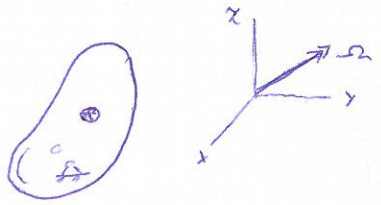
Tabell D17 ger $\bar{I}_G = mR^2 \begin{pmatrix} 2/5 & & \\ & 2/5 & \\ & & 2/5 \end{pmatrix} +$

För I_A använder vi $\bar{I}_A = \bar{I}_G + md^2$, $\overline{GA} = -\underbrace{h}_{d_x}\bar{i} + \underbrace{h}_{d_y}\bar{j} - \underbrace{h}_{d_z}\bar{k}$

$$\therefore \quad \bar{I}_A = mR^2 \begin{pmatrix} 2/5 & & \\ & 2/5 & \\ & & 2/5 \end{pmatrix} + mh^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

OBS! Diagonalelement aldrig negativa

Momentlagen & rörligt koordinatsystem



Map G & O:

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{\bar{I}}\bar{\omega} \\ \Sigma \bar{M} = \dot{\bar{H}} \end{cases}$$

Om $\bar{H}$ representeras i ett rörligt koord.system:

$$\left[\Sigma \bar{M} = \dot{\bar{H}} = \left(\frac{d\bar{H}}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega} \times \bar{H} = \left(\frac{d}{dt}(\bar{\bar{I}}\bar{\omega})\right)_{/xyz} + \bar{\Omega} \times \bar{H} \right]$$

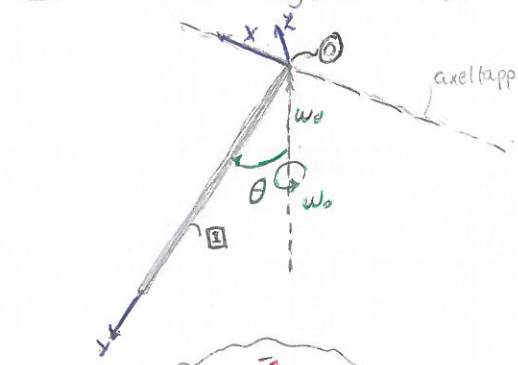
Välj ett rörligt koord.system <u>så att $\bar{\bar{I}}$ blir konstant</u> under rörelsen så att $\frac{d}{dt}\bar{\bar{I}} = 0$

Vanligt val är xyz sådant att det är fixt i kroppen (xyz är då en "body frame")

> Vid 3-D rörelse är i allmänhet
>
> $$\Sigma \bar{M}_G \neq \bar{\bar{I}}_G \bar{\alpha}$$
>
> $$\Sigma \bar{M}_O \neq \bar{\bar{I}}_O \bar{\alpha}$$
>
> Man <u>måste</u> beräkna HL genom derivering av $\bar{H}$

Fö 13: Räkneföreläsning 4

16 Ex: Smal stång, diffekvation

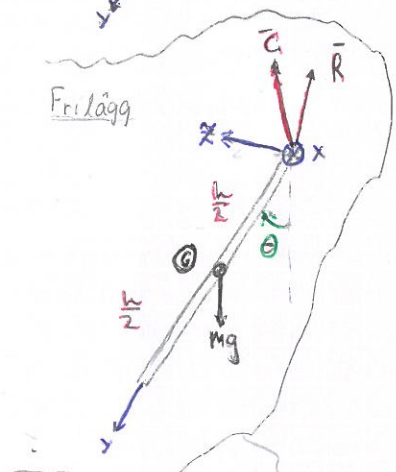


y-axel inbäddad i stången $\boxed{1}$. x-axeln ligger längs axeltappen (O-C)

Reaktionen vid O är $\bar{R}$ & $\bar{C}$

$$\left[\sum \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O \quad (1)\right]$$

Inlästning i gaffeln är sådan att stången kan rotera kring axeltappen



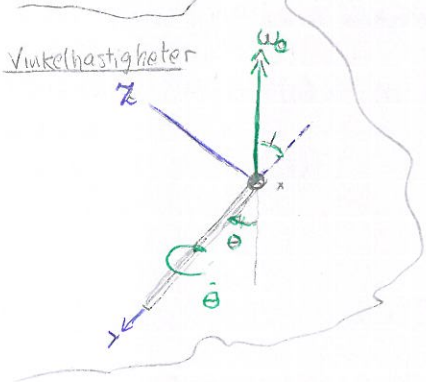
$$\Rightarrow \begin{cases} C_x = 0 \quad , \because \bar{C} = C_x\bar{i} + C_x\bar{j} + C_x\bar{k} \\ \bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum \bar{M}_O = \left\{ \text{"} \sum \bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} + \bar{C} \text{"} \right\} =$$

$$= -mg\frac{h}{2}\sin\theta\,\bar{i} + C_y\bar{j} + C_z\bar{k} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \bar{H}_O = \bar{I}_O\bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1/2} + \bar{\omega}_2 \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_1 = \dot{\theta}\bar{i} + (-\omega_0\cos\theta\,\bar{j} + \omega_0\sin\theta\,\bar{k}) \quad (3)$$



$$\bar{H}_O = \begin{bmatrix} I_{O,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O,yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega_0\cos\theta \\ \omega_0\sin\theta \end{bmatrix}$$

Tabell D/4 $\Rightarrow$ $I_{O,xx} = \frac{mh^2}{3}$, $I_{O,yy} \approx 0$ (smal stång) $I_{O,zz} = \frac{mh^2}{3}$

$$\therefore \bar{H}_O = I_{O,xx}\dot{\theta}\bar{i} + I_{O,zz}\omega_0\sin\theta\,\bar{k}$$

Derivera $\bar{H}$ med Coriolis ekvation: $\dot{\bar{H}}_O = \left(\frac{d\bar{H}_O}{dt}\right)_{/xyz} + \underbrace{\Omega^{xyz}}_{=\bar{\omega}_1} \times \bar{H}_O =$

$$= I_{O,xx}\ddot{\theta}\bar{i} + I_{O,zz}\omega_0\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{k} + \bar{\omega}_1 \times \bar{H}_O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{H}}_O = \left(I_{O,xx}\ddot{\theta} - \omega_0^2 I_{O,zz}\sin\theta\cos\theta\right)\bar{i} + \left(\underbrace{I_{O,xx} - I_{O,zz}}_{=0}\right)\dot{\theta}\,\omega_0\sin\theta\,\bar{j} + \left(I_{O,xx} + I_{O,zz}\right)\dot{\theta}\,\omega_0\cos\theta\,\bar{k} \quad (5)$$

(1) med (2) (5) & komponentvis identifikation

$$\bar{i}: \quad -mg\frac{h}{2}\sin\theta = I_{O,xx}\ddot{\theta} - \omega_0^2 I_{O,zz}\sin\theta\cos\theta \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{j}: & C_y = 0 \\ \bar{k}: & C_z = 0 \end{array}\right\} \text{ej sökta}$$

$\Rightarrow$ Svar: $\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{h}\sin\theta = \omega_0^2\sin\theta\cos\theta$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$

jfr Fö 7; $\omega_0 = 0 \Rightarrow$ pendel

Specialfall av (6), $\theta = \text{konst} \neq 0 \Rightarrow$

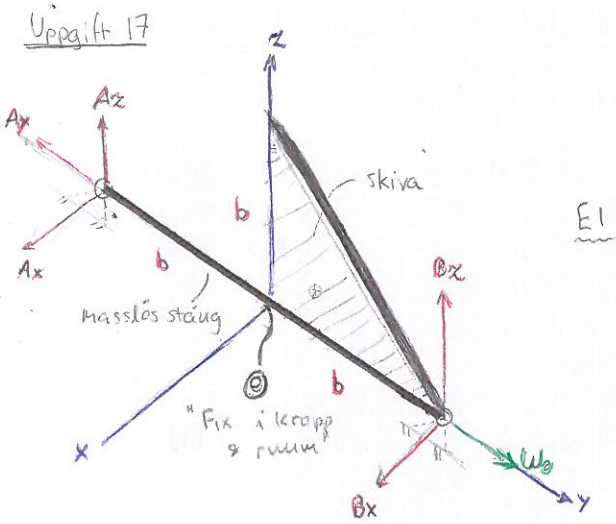
$$\frac{3}{2}\frac{g}{h} = \omega_0^2 \cos\theta \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{h}\frac{1}{\cos\theta}} \qquad (7)$$

Exp: $\theta = 30°$, $L = 0{,}6\,m$. Låt stången snurra 20 varv & beräkna ω_0

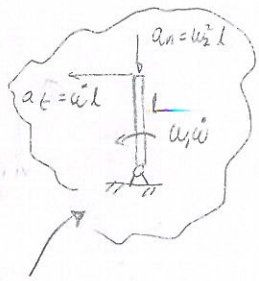
Exp $\Rightarrow$ $\omega_0 = 5{,}46$ rad/s

Matlab $\Rightarrow$ $\omega_0 = 5.32$ rad/s

Uppgift 17



Bortse från mg & låt xyz sitta fast i kroppen
Bestäm $\bar{A}$ & $\bar{B}$

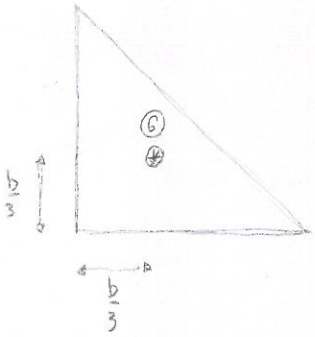


E1: $\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}_G$

$$\begin{cases} \bar{i}: & A_x + B_x = m \cdot a_{G,x} & (1) \\ \bar{j}: & A_y = m \cdot a_{G,y} = 0 & (2) \\ \bar{k}: & A_z + B_z = m\, a_{G,x} & (3) \end{cases}$$

Karusellekvationen (rotation kring fix axel) ger:

$$\begin{cases} a_{G,x} = \dot{\omega}_0 \frac{b}{3} = 0 & (4) \\ a_{G,z} = -\omega_0^2 \frac{b}{3} & (5) \end{cases}$$



E2: $\sum \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O \quad (6)$

VL $\Rightarrow$ $\sum \bar{M}_O = \bar{OA} \times \bar{A} + \bar{OB} \times \bar{B}$

$$= (B_z - A_z) h\, \bar{i} + (A_x - B_x) h\, \bar{k} \qquad (7)$$

HL $\Rightarrow$ $\bar{H}_O = \bar{I}_O \bar{\omega} = \begin{pmatrix} * & -I_{O,xy} & * \\ * & -I_{O,yy} & * \\ * & -I_{O,zy} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Ett } zy\text{-plan är symmetriplan} \\ \text{map } O \Rightarrow I_{O,xy} = 0 \end{matrix} \right\} = I_{O,yy}\, \omega_0 \bar{j} - I_{O,zy}\, \omega_0 \bar{k} \qquad (8)$$

Coriolis $\overset{c}{\dot{\bar{H}}_O} = \left(\frac{d\bar{H}_O}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega}^{xyz} \times \bar{H}_O = \{ \dot{\omega}_0 = 0,\ \bar{\Omega}^{xyz} = \bar{\omega}_0 \} =$

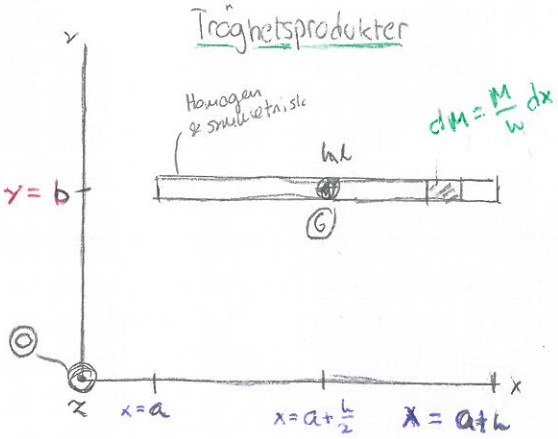
$$= \bar{0} + \bar{\omega}_0 \times \bar{H}_O = -I_{O,zy}\, \omega_0^2\, \bar{i} \qquad (9)$$

(6) med (7), (9) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} B_z b - A_z b = I_{O,zy}\, \omega_0^2 \\ A_x b - B_x b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{ I_{O,zy} = \frac{mb^2}{12} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} A_x + B_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z + B_z = -m\omega_0^2 \frac{b}{3} \\ B_z - A_z = -\frac{1}{b}\frac{mb^2}{12}\omega_0^2 \end{matrix}$$

Svar: $\bar{A}_z = -\frac{1}{8} m b \omega_0^2 \bar{k}$
$\bar{B}_z = -\frac{5}{24} m b \omega_0^2 \bar{k}$

Tröghetsprodukter



Bestäm: $I_{O,xy}$

Alla koordinatplan är symmetriplan map G

$\Rightarrow$ alla tröghetsprodukter $= 0$ map G

Beräkning av $I_{O,xy}$ görs på två olika sätt:

$\boxed{\text{1, definitionen}}$: $I_{O,xy} = \int_{\Omega} xy\,dm = \int_a^{a+h} x\,b\,\frac{m}{h}\,dx$

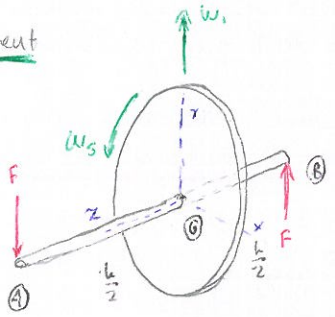
$\boxed{\text{2, Steiners sats}}$: $I_{O,xy} = \underbrace{I_{G,xy}}_{=0} + m\,dx\,dy = \{ dx\,dy = \bar{GO} = -(a + \frac{L}{2})\,\bar{i} + (-b)\,\bar{j} \}$

$\Rightarrow \quad I_{O,xy} = 0 + m\left[-(a + \frac{L}{2})\right] \cdot (-b) = mb(a + \frac{L}{2})$

Hela matrisen $I_O = m \begin{bmatrix} b^2 & -(a+\frac{L}{2})b & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} + (a+\frac{L}{2})^2 b & 0 \\ 0 & -(a+\frac{L}{2})b & \frac{L^2}{12} + (a+\frac{L}{2})^2 + b^2 \end{bmatrix}$

Fö 14:

Gyroexperiment



bortser från mg!

Vrider grovt med händerna med konstant vinkelhastighet ω_1 kring en lodrät axel & med $\bar{\omega}_G = 0$.

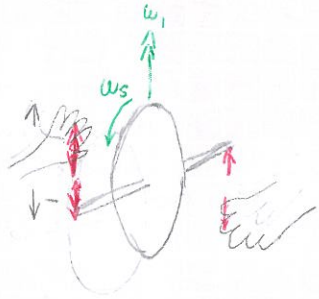
Vilket moment $= F\frac{L}{2} + F\frac{L}{2}$ erfordras för att tvinga att hålla axeln A-B horisontell.

Låter xyz följa med i ω_1-rörelsen, men ej i ω_s-rörelsen.

∴ xyz är ingen "body-frame" (ej kroppsfast)

Euler II a $\Rightarrow \sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G$ (1) , $\bar{\Omega}_{xyz} = \omega_1 \bar{j}$ (xyz-system), $\bar{\omega} = \omega_1 \bar{j} + \bar{\omega}_s k$ (kroppens) $\forall t$

$$\bar{H}_G = \begin{bmatrix} I_{G,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_s \end{bmatrix}$$



Rotationssymmetri $\Rightarrow$ Diagonal & Oberoende av tiden

$\bar{H}_G = I_{G,yy}\omega_1 \bar{j} + I_{G,zz}\omega_s \bar{k}$, $\forall t$ (4)

VL i (1) $\Rightarrow \sum \bar{M}_G = F \cdot L \bar{i}$ (5)

HL i (1) $\Rightarrow \dot{\bar{H}}_G = \left(\frac{d\bar{H}_G}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{H}_G = \{$ låt ω_1 & ω_s = konstant$\} =$

$$= \bar{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 I_{G,yy} \\ \omega_s I_{G,zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_s I_{G,zz} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

HL = VL $\Rightarrow F = \frac{1}{L} I_{G,zz}\, \omega_1 \omega_s$

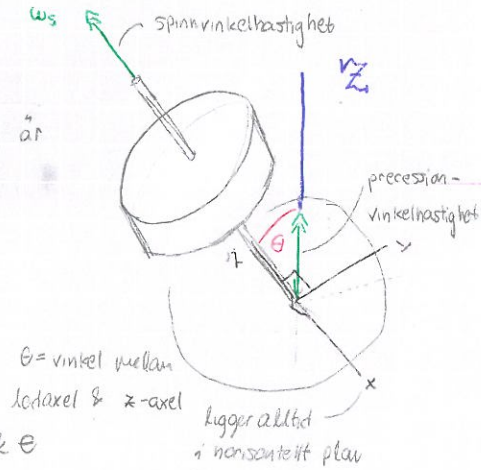
Gyroproblem: Val av koord.system: Om kroppen är rotationssymmetrisk behöver inte xyz sitta fast i kroppen. $\bar{I}$ blir ju konstant ändå (se exempel). Vid gyroproblem använder vi följande standardsystem.

Ex Spinning top

Vanligt specialfall: Stationär precessionen ("steady precession") = ω_s, ω_p & θ är konstanta. Då gäller:

1: Koordinatsystemets vinkelhastighet $\Rightarrow \bar{\Omega}_{xyz} = \bar{\omega}_p$ ($\Leftarrow \theta$ = konst)

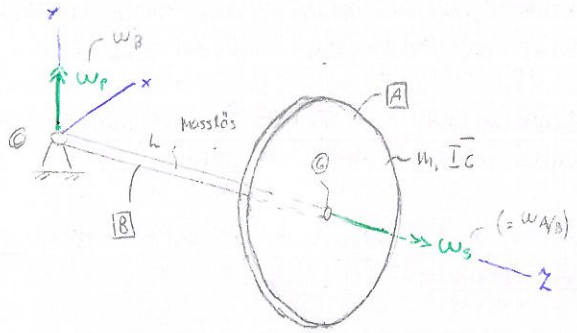
2: Kroppens vinkelhastighet $\Rightarrow \bar{\omega} = \bar{\omega}_s + \bar{\omega}_p$



Anm 1: Om ej θ är konstant: nutation

Anm 2: Rörelselagarna ger sambandet mellan ω_s, ω_p & θ

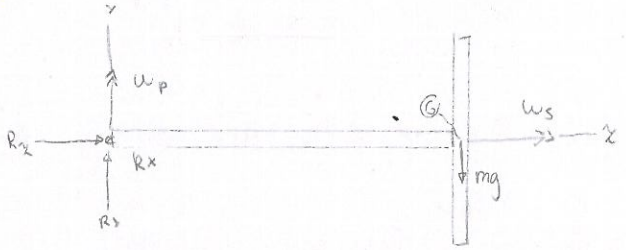
Ex



Givet: Rör sig med horisontell axel ($\theta = 90°$) med ω_S = konstant.

Bestäm: Den konstanta precessionsvinkelhast ω_P & krafterna vid O.

Frilägg.



Då kratterna i O eftersökas behöver vi använda EI:

$$\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}_G \Rightarrow \quad (3)$$

$\bar{i}$: $\quad R_x = m \cdot a_{Gx} = m \cdot \dot{\omega}_P h = m \cdot 0 = 0 \quad (3a)$

$\bar{j}$: $\quad R_y - mg = m \cdot a_{G,y} = 0 \quad (3b)$

$\bar{k}$: $\quad R_z = m \cdot a_{Gz} \underset{\text{karusell}}{=} -m\omega_P^2 h \quad (3c)$

xyz följer med B i ω_P-rörelsen. Y-axeln är hela tiden oförändrad, lodrät.

$$\bar{\Omega}_{xyz} = \omega_P \bar{j} \quad (\text{koord.syst}) \quad (1)$$

Hjulets A vinkelhast. ges

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_{A/B} + \bar{\omega}_B = \omega_S \bar{k} + \omega_P \bar{j} \quad (2)$$

Vi använder nu EII för att lösta upp problemet:

$$\sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G \quad (4)$$

Vl i (4): $\quad \sum M_G = \bar{GO} \times \bar{R} = -R_x h \bar{j} + R_y h \bar{i} = \{3a/3b\} = mgh\,\bar{i} \quad (4a)$

Hl i (4): $\quad \bar{I}_G \bar{\omega} = I_{G,yy}\omega_P \bar{j} + I_{G,zz}\omega_S \bar{k}$

Coriolis ger $\quad \dot{\bar{H}}_G = \left(\frac{d\bar{H}_G}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega} \times \bar{H}_G = \omega_P \bar{j} \times \bar{H}_G = I_{G,zz}\omega_P\omega_S \bar{i} \quad (4b)$

$(4a) = (4b) \Leftrightarrow \quad mgh = I_{G,zz}\omega_P\omega_S \Rightarrow \quad \omega_P = \dfrac{mgh}{I_{G,zz}\omega_S}$

$\therefore$ Svar: $\quad \bar{\omega}_P = \dfrac{mgh}{I_{G,zz}\omega_S}\bar{i}$ $\quad$ ("hög" spinnhastighet ger "låg" precessionshastighet)

$\bar{R} = mg\bar{j} - m\omega_P^2 h \bar{k}$