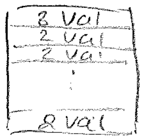
## Lektion 5 (utgivet material)

### Examples of modeling

1. Number of flags with n stripes in 3 colors: red, blue, green, with two conditions:

i) No two consecutive stripes in the same color.

ii) The top and bottom stripes have different colors.



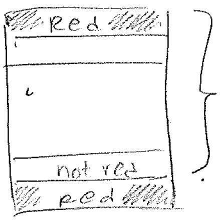

First of all, there is $3 \times 2^{n-1}$ flags satisfying cond. i.

Flags satisfying both conditions ("good flags")

$n=1 \quad a_1 = 0$ (samma färg uppe och nere)

$n=2 \quad a_2 = 6 = 3\cdot 2$

we see that any "bad flag" with n stripes is a good flag with n-1 stripes




Take a good flag with n-1 stripes. Look at the color of the top stripe, say red, so the new stripe has the same red color.

So the bad flags with n stripes are the good flags with n-1 stripes, then $a_n = 3\cdot 2^{n-1} - |\{\text{bad flags with } n \text{ stripes}\}| \Rightarrow$

$$a_n = 3\cdot 2^{n-1} - a_{n-1} \Rightarrow a_n + a_{n-1} = 3\cdot 2^{n-1} \quad (1)$$

$$a_1 = 0$$

Lös (1):

$$a_n + a_{n-1} = 3\cdot 2^{n-1} \quad (2)$$
$$a_{n-1} + a_{n-2} = 3\cdot 2^{n-2} \quad (3)$$

$$\ominus \begin{cases} a_n + a_{n-1} = 3\cdot 2^{n-1} \\ 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3\cdot 2^{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0, \quad n \geq 3 \quad a_1 = 0, a_2 = 6$$

↑ Lös som vanlig diff.

2.

Consider ternery strings of length $n$. How many of these strings satisfy the condition that they contain an odd number of 1:s.

$a_1 = 1$ (1)

$a_2 = 4$ (1,0), (1,2) | (0,1) | (2,1)

To build good lists of length $n$.

Good list of length $n$

case 0: $\underbrace{\underset{1}{-}\ -\ -\ \dots\ \underset{n-1}{-}}$ $0$ → we have a good list of length $n$.

list of length $n-1$ with odd numbers of 1:s

case 2: — " —

case 1: $\underbrace{\underset{1}{-}\ -\ -\ \dots\ \underset{n-1}{-}}_{\text{even nr of 1's.}}\ \underset{n}{1}$ $3^{n-1} - a_{n-1}$ good lists of length $n$.

Totally:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + 3^{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1} + 3^{n-1}$$ WHAT

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2}+1)+1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 =$$
$$= 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} \dots + 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots 2 + 1 = 2^n - 1$$

$$S_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots 2 + 1$$
$$2S_n = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2$$

diff.

$S_n = 2S_n - S_n$ $\quad S_n = 2^n - 1$

OK

[7]

a) $a_n = 6n$ $\quad a_1 = 6 \quad a_3 = 18$
$a_2 = 12 \quad a_4 = 24$

$a_n = a_{n+1} - 6$ , $a_1 = 6$

b) $a_n = 2n+1$ $\quad a_1 = 3 \quad a_3 = 7$
$a_2 = 5 \quad a_4 = 9$

$a_n = a_{n+1} - 2$ , $a_1 = 3$

c) $a_n = 10^n$ $\quad a_0 = 1 \quad a_2 = 100$
$a_1 = 10 \quad a_3 = 1000$

$a_n = 10 \cdot a_{n-1}$ , $n \geq 2$ , $a_1 = 10$
$a_0 = 1$

d) $a_{n+1} = a_n$ $\quad a_1 = 5$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$

9. $F(n) = \sum_{k=1}^{n} k$

$F(n) = F(n-1) + n \quad n \geq 1 \quad , F(0) = 0 \quad n \geq 1$

13. $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$

Induktionsbas :

$f_1 = 1 = f_2$ sant

Induktionsantagande:

$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2p-1} = f_{2p}$

Induktionssteg: visa att:

$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2p-1} + f_{2(p+1)-1} = f_{2p+2} \Rightarrow$

$f_{2p} + f_{2p+1} = f_{2p+2}$ +

15. $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$

Induktionsbas:

$f_0 f_1 + f_1 f_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 = 1^2$ sant!

Induktionsantagande

$f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2p-1} f_{2p} = f_{2p}^2$

Induktionssteg:

$\underbrace{f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots f_{2p-1} f_{2p}}_{= f_{2p}^2} + f_{2p} f_{2p+1} + f_{2p+1} f_{2p+2} = f_{2p+2}^2$

$f_{2p}^2 + f_{2p} f_{2p+1} + f_{2p+1} f_{2p+2} = f_{2p} (f$

s. 510-512

[7]

a) $a_1 = 0$

$a_2 = 1$ $\{0,0\}$

$a_3 = 3$ $\{1,0,0\}$

$\{0,0,1\}$ $\{0,0,0\}$

$a_n$ $\underset{1}{\_}\ \_\ \dots\ \underset{n-1}{\_}\ \underset{n}{0}$

$\underset{}{\_}\ \_\ \dots\ \underset{n-1}{\_}\ \underset{n}{1}$

Det finns ett par av konsekutiva 0:or bland de $n-1$ första position

$\Rightarrow$ det finns $a_{n-1}$ sådana listor

underfall 0,0 $\underset{1}{\_}\ \_\ \dots\ \_\ \underset{n-1}{0}\ \underset{n}{0}$

vi har redan ett par här

$\underset{1}{\_}\ \_\ \dots\ \underset{n-1}{\_}\ \underset{n}{0}$

Alla listor av längd $n-2$ är goda för oss $\Rightarrow$ $2^{n-2}$ sådana listor

underfall 0,1 $\underset{1}{\_}\ \_\ \dots\ \underset{n-2}{\_}\ \underset{n-1}{1}\ \underset{n}{0}$

Par av konsekutiva 0:or finns bland de $n-2$ första positioner

$a_{n-2}$ sådana

totalt $a_n =$

[7] (igen.)

$a_1 = 0$

$a_2 = 1: \{0,0\}$

$a_3 = 3 \quad \{0,0,1\}, \{1,0,0\}, \{0,0,0\}$

Fall 1: 1:a på slutet

$\underbrace{\underset{1}{\_}\ \_ \dots \_\ \underset{n-1}{\_}}\ \underset{n}{1}$

antal bra listor: $a_{n-1}$

Fall 2: 0:a på slutet:

a)

$\underbrace{\underset{1}{\_}\ \_ \dots \underset{n-2}{\_}}\ \underset{n-1}{1}\ \underset{n}{0}$

bra listor: $a_{n-2}$

b)

$\_\ \_ \dots \underset{n-2}{\_}\ \underbrace{\underset{n-1}{0}\ \underset{n}{0}}$

uppfyller kravet $\Rightarrow$

alla möjliga listor är bra:

$2^{n-2}$

svar: $a_n = \overset{a)}{a_{n-1} + a_{n-2}} + \overset{b)}{2^{n-2}}$, $\begin{cases} a_0 = a_1 = 0 \\ n \geq 2 \end{cases}$

c) $a_7 = a_6 + a_5 + 2^5$, där $a_4 = 8$, $a_5 = 19$, $a_6 = 43$

$a_7 = 43 + 19 + 32 = 94$ st

[17] Hitta ett rekursionssamband för antalet ternära följder av längd n som inte innehåller två likadana siffror i följd.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 3 : \{1\}, \{2\}, \{0\} \\ a_2 = 6 \quad \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,0\}, \{2,1\}, \{2,0\} \end{cases}$$

$a_n$:

$\underbrace{\_\ \_\ \dots\ \_\ \_}_{1 \quad\quad n-2\ n-1}\ \underset{n}{\_}$

$a_{n-1}$ = antalet bra listor.

för att få n bra listor kan vi lägga till 1 av 2 siffror så:

$a_n = 2 a_{n-1}$ , $n \geq 2$ , $a_1 = 3$

c) $a_6 = ?$

$a_n = 2a_{n-1} = 2(2a_{n-2}) = 2^2(2a_{n-3}) = 2^3 a_{n-4} = 2^{n-1} \cdot a_1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

så $a_6 = 3 \cdot 2^5 = \underline{\underline{96}}$

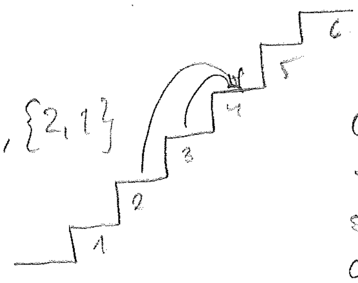
11. Rekursionssamband för antalet sätt att gå n steg om personen som går kan ta en eller två steg i taget.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$   1,1, el 2

$a_3 = 3$   $\{1,1,1\}, \{1,2\}, \{2,1\}$

$a_n$




antalet sätt att ta mig till steg fyra är antalet sätt att ta mig till 3 + antal sätt att ta mig till 2.

$\Rightarrow$ så $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$   , $n \geq 2$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

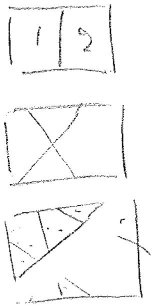
fibonacci!

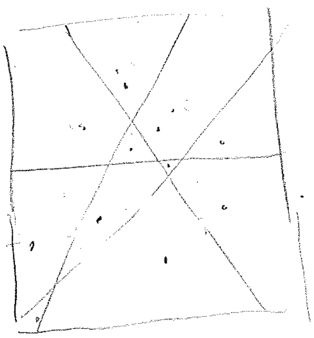
21. $R_n$ = antal regioner som bildas när n linjer delar upp ett plan. Inga är parallella och inga 3 går genom samma punkt.

$a_1 : 2$

$a_2 : 4$

$a_3 : 7$



$a_{n-1}$ är antal regioner med n-1 linjer.
att lägga till ytterligare 1 linje, så korsar den alla andra linjer (enl. villkor) och genererar n nya regioner, alltså:

$\underline{a_n = a_{n-1} + n}$

$$R_n = R_{n-1} + n$$

$$R_n = (R_{n-2} + (n-1)) + n = R_{n-2} + (n-1) + n$$

$$= (R_{n-3} + (n-2)) + (n-1) + n = \ldots\ldots$$

$$= R_{n-4} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n.$$

$$\vdots$$

$$= R_3 + 4 + \ldots (n-3) + (n-2) + (n+1) + n$$

$$R_2 + 3 + 4 + \cdots (n-2) + (n-1) + n$$

$$R_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

$$= \underbrace{R_0}_{=1} + 1 + 2 + \ldots + n = 1 + \{1 + 2 + 3 + \ldots n\} =$$

$$= \underbrace{1 + \frac{n(1+n)}{2}}_{\text{svar}}$$

# Lektion 6

3

c) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ $\quad a_0 = 1,\ a_1 = 0$

Kar. eku:

$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow \left\{ r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = 3, 2 \right\}$

$(r-3)(r-2) = 0$ , detta ger:

$a_n = \alpha 3^n + \beta \cdot 2^n$ . BV ger: $\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = 3\alpha + 2\beta \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -2 = \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

$\therefore\ a_n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$ R

d) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ $\quad a_0 = 6,\ a_1 = 8$

$r^2 - 4r + 4 = 0$ $\quad \left\{ r = 2 \pm \sqrt{4-4} \right\} \Rightarrow$

$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n \cdot 2^n$ $\quad$ BV: $\begin{cases} 6 = \alpha \\ 8 = 2\alpha + 2\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n \cdot 2^n$ R

e) $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ $\quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

$r^2 + 4r + 4 = 0 = \left\{ r = -2 \pm \sqrt{4-4} \right\}$

$a_n = \alpha(-2)^n + \beta n(-2)^n$

BV:

$\begin{cases} 0 = \alpha \\ 1 = \alpha + 2\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$

$\therefore\ a_n = -\frac{1}{2} \cdot n(-2)^n = n\left(-\frac{2}{2}\right)^n = n(-2)^{n-1}$