TATA82 Diskret matematik CC #1

Induktionsbevis

- Alltid en uppgift på tentan
- Standardiserad lösningsgång
- Nyckelord: "Visa att … (påstående) … med induktion"

Lösningsmetod

detta steg kallas för induktionsantagandet

1) Visa att påståendet gäller för basfallet, ex. $n=1$
2) Antag att påståendet gäller för något $n=p$, där $p \geq$ "basfall"
3) Visa att, givet (2), så gäller påståendet för $n=p+1$
4) Induktionsprincipen (IP) ger då att påståendet gäller för alla $n \geq$ "basfall"

Exempel Visa att $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

1) Visa för basfallet, $n=1$

Dela upp i VL och HL:

$$\underline{VL} = 1$$
$$\underline{HL} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$
$$VL = HL \quad \text{VSV.}$$

2) Antag att det gäller för $n=p$, $p \geq 1$

Dvs: $1+2+\dots+p = \dfrac{p(p+1)}{2}$, $p \geq 1$. $(*)$

3) Visa att påståendet gäller för $n=p+1$

Ska visa $1+2+\dots+p+(p+1) = \dfrac{(p+1)[(p+1)+1]}{2}$

Dela upp i VL och HL:

$$\underline{VL}: \underbrace{1+2+\dots+p}+(p+1) =$$
$$= \Big/ = \frac{p(p+1)}{2} \text{ enligt } (*) \Big/$$
$$= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$
$$= \frac{p^2+3p+2}{2}$$

Här använder vi induktionsantagandet. Viktigt steg!

$$\underline{HL}: \frac{(p+1)[(p+1)+1]}{2}$$
$$= \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$
$$= \frac{p^2+3p+2}{2}$$

$$VL = HL, \quad \text{VSV.}$$

4) Enligt IP har vi visat att $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

Anmärkning: Visat att om det gäller för $n=p \Rightarrow$ gäller för $n=p+1$. Men då gäller det även för $n=p+2$ osv.

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (3) \longrightarrow$$
$$n=p \qquad n=p+1 \qquad n=p+2$$

Exempel (2017-10-28 uppgift 1) Visa att $\sum_{k=1}^{n}(k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}, n\geq 1.$

Lösning

1) Visa att det gäller för basfallet, $n=1$

Dela uppi VL och HL:

$$\text{VL}: \sum_{k=1}^{1}(k+1)k^2 = (1+1)1^2 = 2$$

— ty det är en summa av bara 1 term

$$\text{HL}: \frac{1(1+1)(1+2)(3\cdot 1+1)}{12} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{12} = 2$$

VL = HL, vsv.

2) Antag att påståendet gäller för $n=p$, $p\geq 1$

Dvs: $$\sum_{k=1}^{p}(k+1)k^2 = \frac{p(p+1)(p+2)(3p+1)}{12} \quad (*)$$

OBS!

3) Visa att påståendet gäller även för $n=p+1$

Ska visa $$\sum_{k=1}^{p+1}(k+1)k^2 = \frac{(p+1)[(p+1)+1][(p+1)+2][3(p+1)+1]}{12}$$

Dela upp i VL och HL:

$$\text{VL}: \sum_{k=1}^{p+1}(k+1)k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{p}(k+1)k^2}_{\text{ursprunglig summa}} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{p+1}(k+1)k^2}_{\text{summa av }k+1\text{:e termen}}$$

Dela upp summor i ursprunglig del + ny del är ofta väldigt användbart

$$= \frac{p(p+1)(p+2)(3p+1)}{12} \text{ enligt } (*) \qquad = [(p+1)+1](p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)(3p+1)}{12} + (p+2)(p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)(3p+1) + 12(p+1)^2(p+2)}{12}$$

Bryta ut gemensamma faktorer är ett annat användbart knep

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{12}\left[p(3p+1) + 12(p+1)\right]$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{12}\left[3p^2+13p+12\right]$$

$$\text{HL}: \frac{(p+1)[(p+1)+1][(p+1)+2][3(p+1)+1]}{12} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(3p+4)}{12}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{12}\left[(p+3)(3p+4)\right]$$

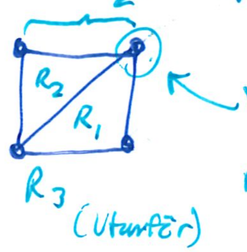
$$= \frac{(p+1)(p+2)}{12}\left[3p^2+13p+12\right]$$

4) Enligt IP har vi visat att $\sum_{k=1}^{n}(k+1)k^2 = n(n+1)(n+2)(3n+1), n\geq 1.$

Grafteori

- Alltid minst en uppgift på tentan!
- Metoder för de flesta fallen – inte alla dock!
- 2 typer av frågor: tolka graf eller bevisa teoretiskt

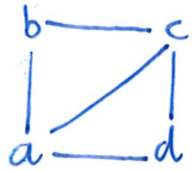
Terminologi



e = edge = kant/båge

v = vertex = hörn/nod

r = region



Väg: $a \to b \to c$

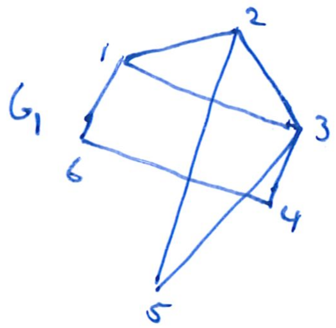
Cykel: sluten enkel väg, $a \to b \to c \to a$ (startar och slutar på samma men i övrigt olika hörn)

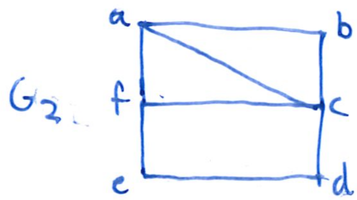
Isomorfi

Isomorfi = "samma form", så vi vill veta om två grafer som ser olika ut egentligen har samma struktur (och är samma).

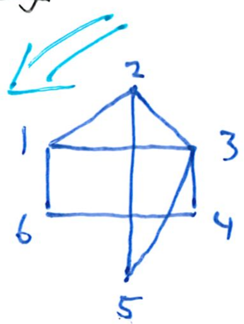
$\Rightarrow$ Vrid, vänd, rotera (men ej bryta/skapa nya kopplingar)

Exempel (2012-01-13 Uppgift 2) Ange en isomorfi mellan graferna G_1 och G_2 nedan:

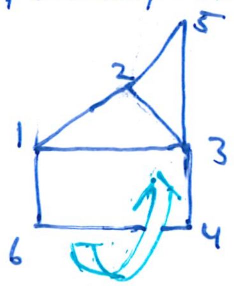




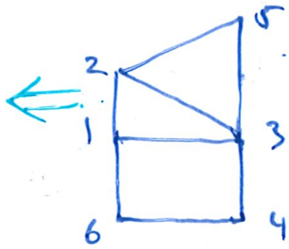
Lösning Kan vi vrida/vända/rotera G_1 så att den "blir" G_2?



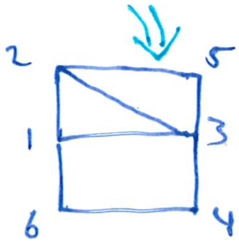
"Rotera horisontellt"



"Vik upp 5-hörnet"



"Dra ut 2-hörnet"



"Tryck ner 5-hörn"

Svar Isomorfin är $a \to 2$, $b \to 5$, $c \to 3$, $d \to 4$, $e \to 6$, $f \to 1$

TATA82 Diskret matematik CC #1

Eulergrafer

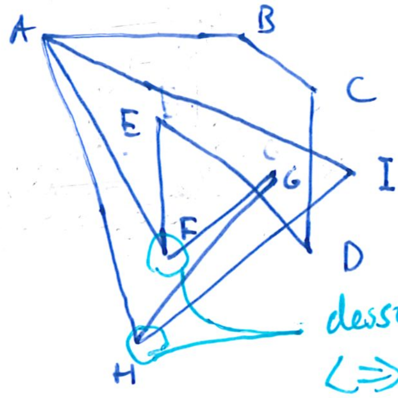
Finns det en sluten väg som passerar varje kant exakt en gång? (startar och slutar i samma hörn) Detta kallas en Eulercykel.

Lösningsmetod

Använd sats 8.3.2:

Varje hörn i grafen har jämnt gradtal $\Leftrightarrow$ Det finns en sluten Eulerväg (grafen är Eulersk)

Exempel (2014-10-23 uppgift 4) Är grafen Eulersk?



dessa hörn har det udda gradtalet 3 $\Leftrightarrow$ grafen är ej Eulersk

Hamiltongrafer

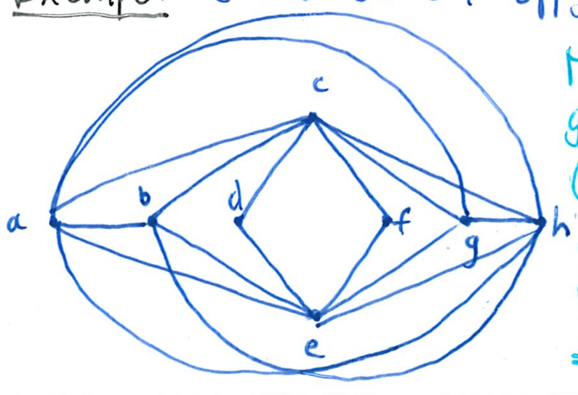
Finns det en sluten väg där varje hörn förekommer exakt en gång? (förutom start och slut) Detta kallas en Hamiltoncykel.

Lösningsmetoder

1) Manuellt hitta Hamiltoncykel
2) Bevisa att det inte kan finnas en Hamiltoncykel:

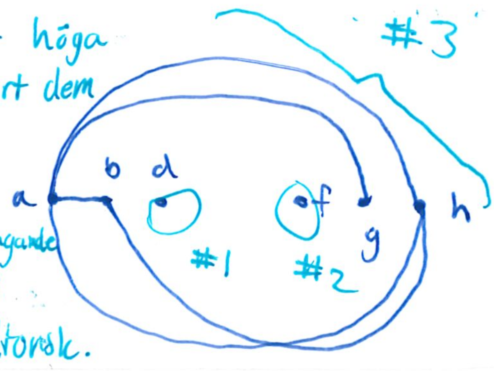
(Sats 8.4.3) Om man tar bort k st hörn och deras tillhörande kanter, och får minst k+1 st sammanhängande komponenter $\Rightarrow$ grafen kan inte innehålla en Hamiltoncykel

Exempel (2015-06-04 uppgift 2) Är grafen Hamiltonsk?



Hörnen c och e har höga gradtal. $\Rightarrow$ prova ta bort dem ($k = 2$ st)

Vi får 3 st sammanhängande komponenter. $k+1 = 3$ $\Rightarrow$ grafen är ej Hamiltonsk.



Bipartita grafer

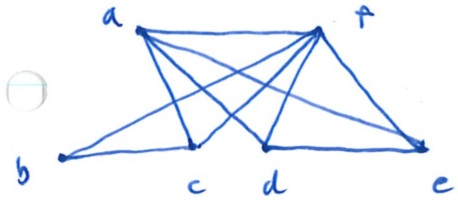
Går det att dela upp grafen i två delar, som tillsammans innehåller alla hörn men inte överlappar sinsemellan? (två delar: kallas bipartitioner)

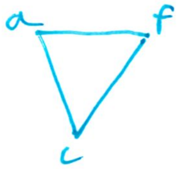
Lösningsmetod

Använd sats 8.5.5:

Det finns inga cykler av udda längd $\iff$ grafen är bipartit

Exempel (2014-06-04 uppgift 2) Är grafen bipartit?





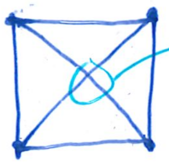
är en cykel av längd 3.

Udda cykel $\Rightarrow$ grafen är ej bipartit.

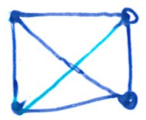
Planära grafer

Det finns en geometrisk representation i planet, så att inga kanter skär varandra förutom i hörn. (geometrisk representation i planet: kallas för plan inbäddning) Notera att man måste ta hänsyn till isomorfier och andra sätt att representera grafen.

Exempel



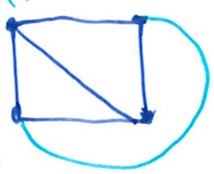
kanter skär varandra och det är inte ett hörn $\Rightarrow$ ej planär?



$\Rightarrow$

(får ej bryta kanter men OK att lyfta)

(isomorf med vänstra)



inga kanter skär varandra $\Rightarrow$ planär!

Lösningsmetoder

1) Manuellt hitta plan inbäddning ("lyfta kanter")

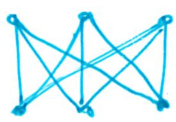
2) Bevisa att grafen inte är planär:

(Sats 10.1.10) Enkel graf (inga loopar) med e kanter och $v \geq 3$ hörn är inte planär om $e > 3v - 6$.

3) Använd Kuratowskis sats:

(Sats 10.3.3) Grafen är planär $\iff$ Innehåller inte K_5 eller $K_{3,3}$ som delgraf, eller någon delgraf som är en indelning av dem.

K_5

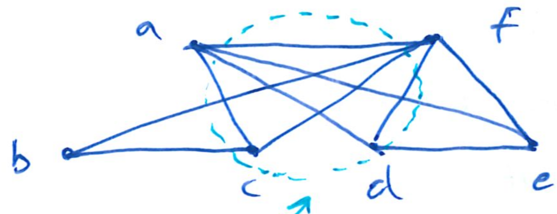


$K_{3,3}$

indelningar av K_5

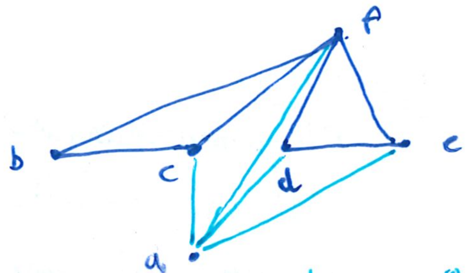
"lägg till hörn på befintlig linje"

Exempel (2014-06-04 uppgift 4) Är grafen planär?



massor av kanter skär varandra här ⇒ ej planär?

Hörn a verkar vara en knytpunkt. Prova flytta ner!



Inga skärningar ⇒ planär!

Teoretiska uppgifter

Bygger oftast på användning av en/flera satser för att (mot)bevisa ett påstående.

- "Handskakningslemmat": $\sum_v \deg(v) = 2e$

  summan av alla hörns gradtal = 2 × antal kanter

- $\deg(r) :=$ gradtal för en region $=$ antal kanter som utgör regionen. $\sum_r \deg(r) = 2e$

- "Eulers formel": $v - e + r = 2$ [OBS: endast sammanhängande planära grafer]

Exempel (2017-08-17 uppgift 2) Visa att en graf med n^2 noder, alla med gradtal n, $n \geq 3$, inte kan vara planär.

1) "Visa att ej planär" ⇒ (sats 10.1.10) ej planär om $e > 3v - 6$

"noders gradtal" ⇒ Handskakningslemmat

2) Vet att v = antal noder $= n^2$. Söker därför e = antal kanter.

(Handskakningslemmat) $\sum_v \deg(v) = 2e$

/ summa av n^2 noders gradtal. Alla har gradtal n, ⇒ $n^2 \times n = n^3$ /

$$n^3 = 2e$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^3}{2} = e$$

3) Slå ihop!

$$\left.\begin{array}{l} v = n^2 \\ e = \frac{n^3}{2} \end{array}\right\} \quad e > 3v - 6 \Rightarrow \frac{n^3}{2} > 3n^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow n^3 > 6n^2 - 12$$

Detta gäller för $n \geq 3$ (kontrollera), så grafen är ej planär

VSV.

Exempel (2016-06-03 uppgift 2) En sammanhängande planär graf har endast hörn med gradtal 4. Ange antal regioner i grafen som en funktion av antal kanter.

Approach

- "Sammanhängande planär graf" $\Rightarrow$ Eulers formel
- "Hörns gradtal" $\Rightarrow$ handskakningslemmat
- (samband mellan) regioner och kanter $\Rightarrow$ Eulers formel

Vad vi vet

- v hörn, endast hörn med gradtal 4 $\Rightarrow$ $\deg(v) = 4$ (1) (för alla v)
- e kanter
- r regioner
- $v - e + r = 2$ (Eulers formel) (2)
- $\sum_v \deg(v) = 2e$ (Handskakningslemmat) (3)

Vad vi söker: Antal regioner (r) som funktion av antal kanter (e)

(2) ger $v - e + r = 2 \iff r = 2 - v + e$ (4)

problematisk! Vill skriva v som funktion av e.

(1) i (3) ger $\sum_v \deg(v) = 2e \iff 4v = 2e$

$\iff v = \frac{e}{2}$ (5)

(5) i (4) ger $r = 2 - v + e \iff r = 2 - \frac{e}{2} + e$

$\iff r = 2 + \frac{e}{2}$

VSV.