Sammanfattning TATA42

1. Tillämpningar Integraler

1.1 Funktionskurva, y=f(x)

Area

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Kurvlängd

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Volym

Volymen innebär summerad area eller volymfragment.

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx$$

Rotationsvolym kring x-axeln

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

Man summerar helt enkelt tvärsnittsareor av en cirkel, där varje tvärsnittsarea uttrycks

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A(x) = \pi f(x)^2$$

$$dV = Snittarea * tjockleck = \pi f(x)^2$$

Rotationsvolym kring y-axeln

Mest anpassningsbara metoden är *Cylindermetoden*.

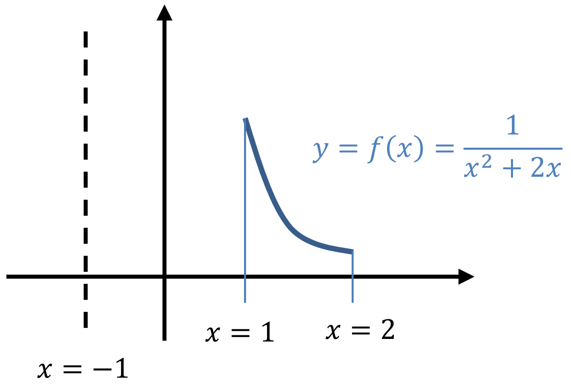
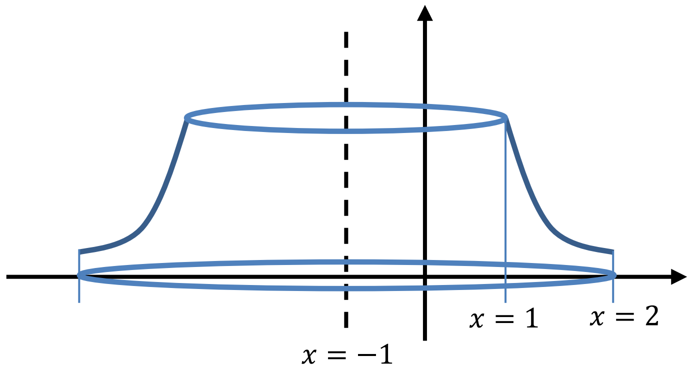
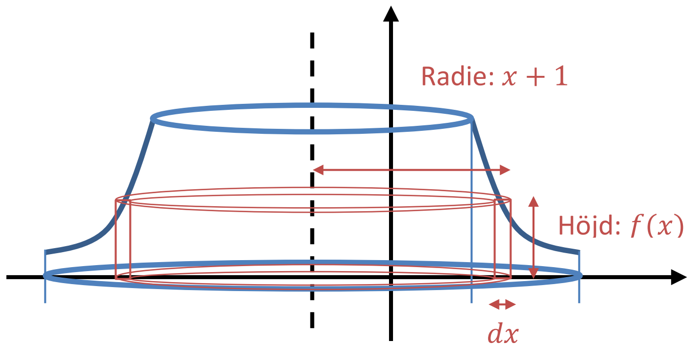
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Tips: Bra videos på KhanAcademy

- Cylindermetoden: Grundläggande
  - https://www.khanacademy.org/math/calculus/solid_revolution_topic/shell-method/v/shell-method-for-rotating-around-vertical-line
- Cylindermetoden: Lite mer avancerat.
  - https://www.khanacademy.org/math/calculus/solid_revolution_topic/shell-method/v/shell-method-with-two-functions-of-x

Exempel: Uppgift 2 från Tenta 2011-05-28 TATA42

Området givet av $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2+2x}$ och $1 \leq x \leq 2$ roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Beräkna rotationskroppens volym.

<table>
<tr><td>1. Skissa grafen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Skissa rotationen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Rita ut rätblocket som ska roteras. Skriv upp cylinders element.</td><td>

Cylinder:

Omkrets: $2\pi r = 2\pi(x+1)$
Höjd: $f(x)$
Bredd: dx

$dV = 2\pi(x+1)f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>4. Utför beräkningen.</td><td>

$$V = \int_a^b dV = \int_1^2 2\pi(x+1)f(x)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_1^2 (x+1)\frac{1}{x^2+2x}dx = \pi \int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x}dx = \pi[\ln(x^2+2x)]_1^2 = \pi(\ln 8 - \ln 3) = \pi \ln\frac{8}{3}$$

</td></tr>
</table>

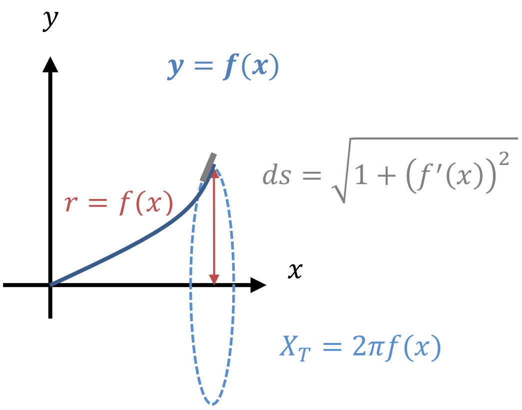
Rotationsarea

Med Pappos-Guldins regel kan man härleda formeln för rotationsarean.

$$Rotationsarea = Tyngdpunktens\ väg \cdot Kurvlängden$$

Rotation kring x-axeln

Teori

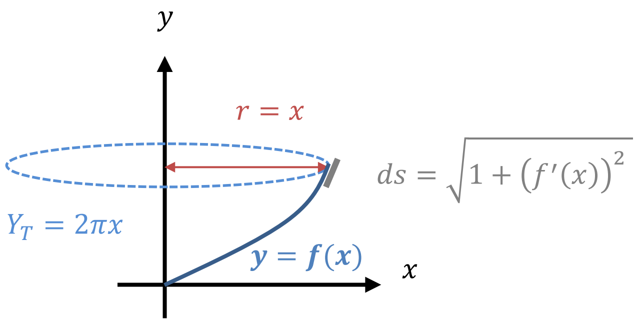


Formel

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Rotation kring y-axeln

Teori

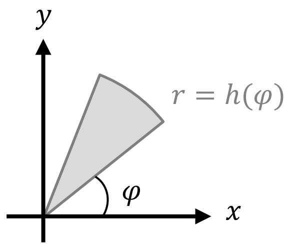


Formel

$$A = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

1.2 Polär form

Area



$$A = \int dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} h(\varphi)^2 \, d\varphi$$

Obs! Formeln förutsätter att

$0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ (kan inte gå längre än ett varv).

Kurvlängd

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} \, d\varphi$$

Volym

Rotation kring x-axeln

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)^3 \sin\varphi \; d\varphi$$

Rotation kring y-axeln

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)^3 \cos\varphi \; d\varphi$$

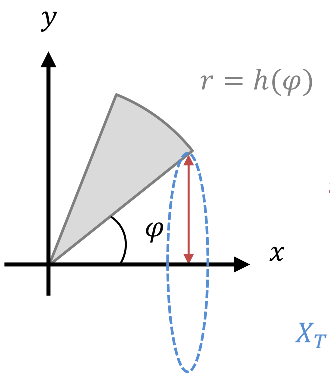
Rotationsarea

Med Pappos-Guldins regel kan man härleda formeln för rotationsarean.

$$Rotationsarea = Tyngdpunktens\ väg \cdot Kurvlängden$$

Rotation kring x-axeln

Teori



$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = h(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

$$X_T = 2\pi y = 2\pi \cdot\ h(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

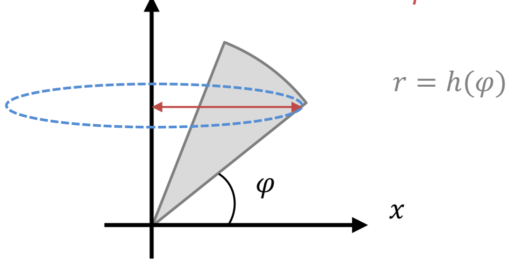
Formel

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi) \sin\varphi \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi$$

Rotation kring y-axeln

Teori

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = h(\varphi) \cdot \cos\varphi$$



$$Y_T = 2\pi x = 2\pi \cdot\ h(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

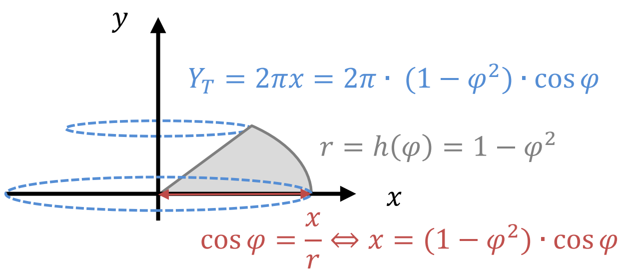
Formel

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi) \cos\varphi \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi$$

Exempel

Exempel: Uppgift 6, Tenta 2011-03-19 TATA42

Kurvan given i polära koordinater av $r = 1 - \varphi^2$, där $0 \le \varphi \le \pi/4$, roteras ett varv kring y-axeln. Bestäm rotationsytans area.

1. Gör en enkel skiss av funktionen. Rita ut rotationen.	
2. Ställ upp formeln.	$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta h(\varphi)\cos\varphi\sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}d\varphi$$
3. Utför beräkningarna (dela upp i steg).	$h(\varphi) = (1-\varphi^2)$ $h'(\varphi) = -2\varphi$ $\sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} = \sqrt{(1-\varphi^2)^2 + (-2\varphi)^2} = \sqrt{1 - 2\varphi^2 + \varphi^4 + 4\varphi^2} =$ $\sqrt{1 + 2\varphi^2 + \varphi^4} = \sqrt{(1+\varphi^2)^2} = 1 + \varphi^2$
4. Sätt in uttrycken i intergranden.	$$A = 2\pi\int_0^{\pi/4}(1-\varphi^2)\cos\varphi\,(1+\varphi^2)d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/4}(1-\varphi^4)\cos\varphi\,d\varphi$$
5. Tar fram den primitiva funktionen med partiell integration.	$\int(1-\varphi^4)\cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) - \int\sin\varphi\cdot -4\varphi^3 d\varphi =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) + 4\int\sin\varphi\cdot\varphi^3 d\varphi =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) + 4\left(-\cos\varphi\cdot\varphi^3 - \int -\cos\varphi\cdot 3\varphi^2\,d\varphi\right) =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\int\cos\varphi\cdot\varphi^2\,d\varphi =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\left(\sin\varphi\cdot\varphi^2 - \int\sin\varphi\cdot 2\varphi\,d\varphi\right) =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\sin\varphi\cdot\varphi^2 - 24\int\sin\varphi\cdot\varphi\,d\varphi =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\sin\varphi\cdot\varphi^2 - 24\left(-\cos\varphi\cdot\varphi - \int -\cos\varphi\,d\varphi\right) =$ $= \sin\varphi\cdot(1-\varphi^4) - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\sin\varphi\cdot\varphi^2 + 24\cos\varphi\cdot\varphi - \sin\varphi =$ $= \sin\varphi - \sin\varphi\cdot\varphi^4 - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\sin\varphi\cdot\varphi^2 + 24\cos\varphi\cdot\varphi - 24\sin\varphi =$ $= -\sin\varphi\cdot\varphi^4 - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\sin\varphi\cdot\varphi^2 + 24\cos\varphi\cdot\varphi - 23\sin\varphi$
6. Beräknar värdet.	$A = 2\pi[-\sin\varphi\cdot\varphi^4 - 4\cos\varphi\cdot\varphi^3 + 12\sin\varphi\cdot\varphi^2 + 24\cos\varphi\cdot\varphi - 23\sin\varphi]_0^{\pi/4} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi\left(\left(-\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - 4\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + 12\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 24\cdot\frac{\pi}{4} - 23\right) - 0\right) =$ $= \sqrt{2}\pi\left(-\frac{\pi^4}{256} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{3}{4}\pi^2 + 6\pi - 23\right)$
Svar:	$\sqrt{2}\pi\left(-\frac{\pi^4}{256} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{3}{4}\pi^2 + 6\pi - 23\right)$

1.3 Guldins regler och Tyngdpunkt

Guldins två huvudregler är:

$$Rotationsarea = Tyngdpunktens\ väg \cdot Kurvlängden$$

$$Rotationsvolym = Tyngdpunktens\ väg \cdot Arean$$

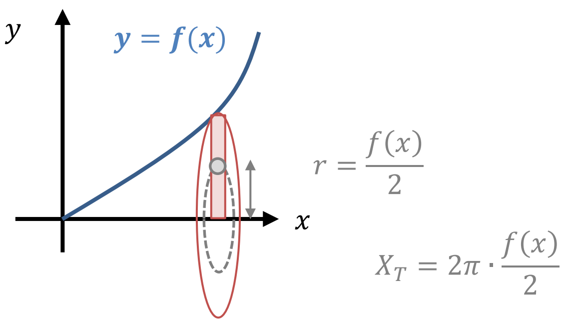
Reglerna är väldigt användbara framförallt vid rotation som inte är runt en lodrät eller horisontal axel.

För tillämpning av Guldins regler gällande rotationsarea, se avsnittet om rotationsarea för funktionskurvor respektive funktioner i polär form. Nedan beskrivs endast rotationsvolymer enligt Guldins regler.

Rotationsvolym

Rotationsvolym runt x-axeln

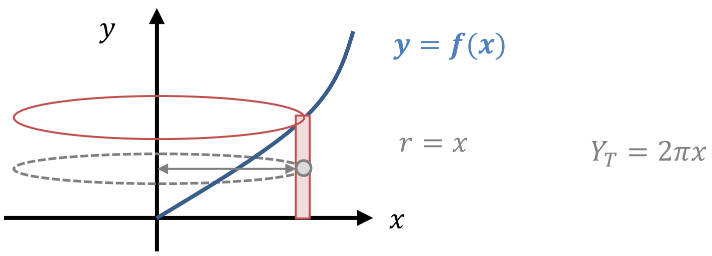
Teorin om rotation kring x-axeln utgår från att man delar upp funktionen i ”diskar” som man låter rotera i en cirkel. Tyngdpunktens väg blir här en cirkel vars radie är halva ”diskens” höjd.



$$Rotationsvolym = Tyngdpunktens\ väg \cdot Arean \Leftrightarrow$$

$$dV = 2\pi \frac{f(x)}{2} \cdot f(x)dx \quad \Rightarrow \quad V = \int dv = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Rotationsvolym runt y-axeln



$$Rotationsvolym = Tyngdpunktens\ väg \cdot Arean \Leftrightarrow$$

$$dV = 2\pi x \cdot f(x)dx \quad \Rightarrow \quad V = \int dv = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Rotationsvolym runt linje

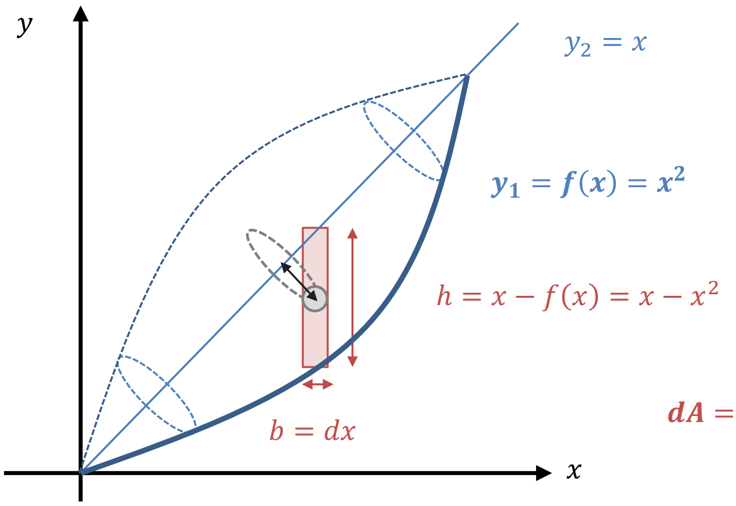
För rotationsvolym kring en rät linje (som inte är horisontell eller vertikal) finns det ingen bestämd formel. För att beräkna rotationsvolymen måste man ta fram uttryck för:

1. Areaelement
2. Tyngdpunktens väg.

I exemplet nedan visas hur man tar fram respektive uttryck.

1 – Areaelement

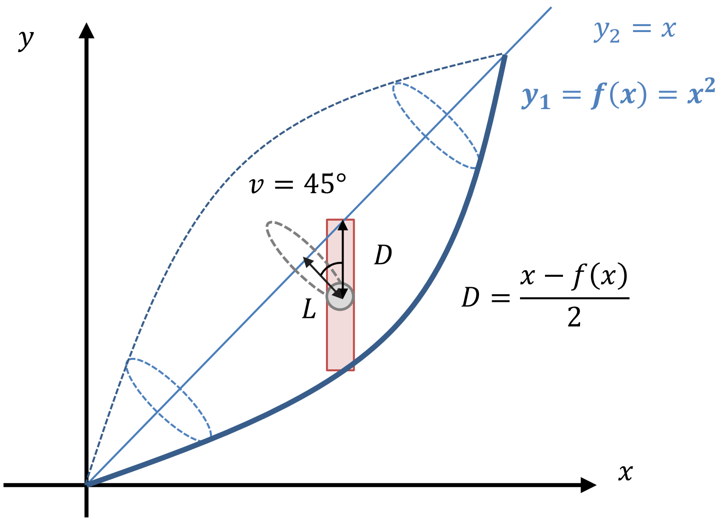
Areaelementet är den röda rektangeln vars *bas* utgörs av *skillnaden i x* (dx) och *höjd* som utgörs av *skillnaden mellan funktionerna* $(y_2 - y_1)$.



$$\boldsymbol{dA = (x - x^2) \cdot dx}$$

2 – Tyngdpunktens väg

Tyngdpunktens väg innebär den cirkel som roterar runt $y = x$ som har en radie som ligger på halva areaelementet.



$$\cos v = \frac{L}{D}$$

$$D = \frac{x - f(x)}{2}, v = 45°, f(x) = x^2$$

$$L = \frac{x - f(x)}{2} \cdot \cos 45° = \frac{x - x^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tyngpunktens väg:

$$\boldsymbol{2\pi L = \pi \frac{x - x^2}{\sqrt{2}}}$$

Rotationsvolymen:

$$Rotationsvolym = \boldsymbol{Tyngdpunktens\ väg} \cdot Arean \Rightarrow dV = \boldsymbol{\pi \frac{x - x^2}{\sqrt{2}}} \cdot \boldsymbol{(x - x^2) \cdot dx}$$

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_a^b (x - x^2)^2 dx$$

Generell metod:

Generellt sätt kan man lösa rotationsproblem med följande metod.

1. Gör en skiss av figuren
2. Ta fram uttryck för ett areaelement.
3. Bestäm uttryck för tyngdpunktens väg.
4. Beräkna integralen.

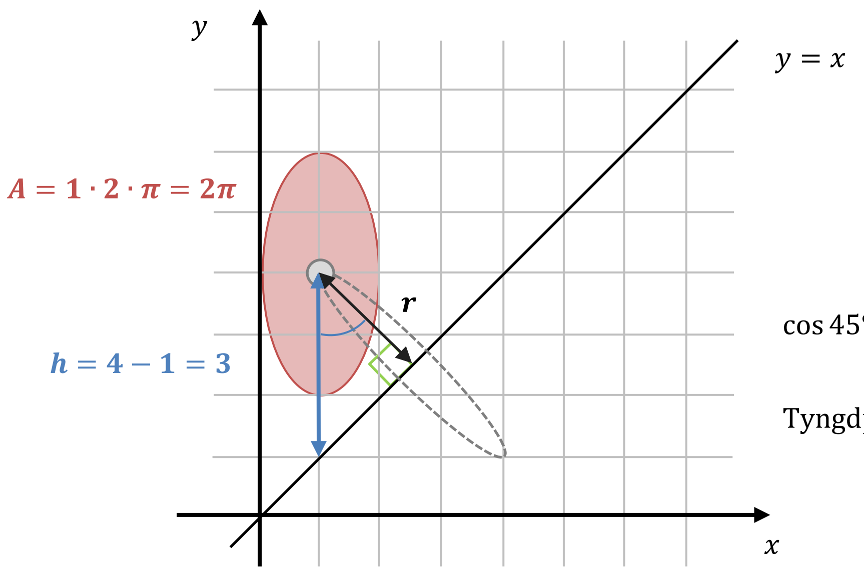
Exempel: Uppgift **6** från Tenta 2011-06-09 TATA42

Området givet av $4(x-1)^2+(y-4)^2 \leq 4$ roteras ett varv kring linjen $y=x$. Beräkna rotationskroppens volym.

Uttrycket $4(x-1)^2+(y-4)^2 \leq 4$ beskriver en ellips (med halvaxellängderna 1 respektive 2) med centrum i $(1,4)$. För att beräkna rotationsvolymen är det smidigast att använda Guldins regel:

$$Rotationsvolym \ = \ Tyngdpunktens \ väg \ \cdot \ Arean$$

Area ellips: $A = ab\pi$ där a och b är ellipsens halvaxellängder.



$$\cos 45° = \frac{r}{h} \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

Tyngdpunktens väg: $2\pi r = \frac{2\pi 3}{\sqrt{2}} = 3\pi\sqrt{2}$

Uppgiften skiljer sig från ”typuppgiften” då arean för ellipsen kan beräknas direkt. Därför behöver man heller inte ställa upp någon integral för att beräkna volymen, utan det räcker med att multiplicera kroppens totala area med tyngdpunkten.

$$Rotationsvolym \ = \ Tyngdpunktens \ väg \ \cdot \ Arean \ \Rightarrow \ 3\pi\sqrt{2} \cdot 2\pi = 6\sqrt{2}\pi^2$$

Svar: $6\sqrt{2}\pi^2$

2. Maclaurin- och Taylorutvecklingar

2.1 Maclaurinutvecklingar

$$\left.\underbrace{f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(x)\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{\textit{Approximation}} + r(x)\right\} \textit{Fel / Restterm}$$

Där $r(x)$ står för resten.

Standardutvecklingar

Obs! Endast när $x \to 0$

	Funktion	Maclaurinutveckling
A	e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + r(x)$
B	$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + r(x)$
C	$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + r(x)$
D	$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + r(x)$
E	$(1+x)^a$	$1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \binom{a}{4}x^4 + \ldots + r(x)$
F	$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + r(x)$

Räknelagar för *Ordo*

Syftet med Ordo är att ”samla ihop” felet i approximationen. $O(x^2)$ innebär att felet är en begränsad funktion där den störst betydande termen är x^2.

Lite mer drastiskt kan man se Ordo-funktionen som ett svart hål där man slänger allt som saknar större betydelse.

Då Maclaurinutvecklingar gäller för $x\ nära\ 0$ så innebär det i regel att t.ex. $x^3 > x^4$, eller allmänt: $x^m > x^n$, då $m < n$. Detta förklarar en del regler som intuitivt kan tyckas märkvärdiga.

Räknelag	Exempel	Kommentar
$O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$ då $m \leq n$	$O(x^5) + O(x^3) + O(x^7) = O(x^3)$	Lägst grad bestämmer.
$x^n + O(x^m) = O(x^m)$ då $m \leq n$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$	”Sväljer” allt med samma eller lägre gradtal.
$O(x^m)\cdot O(x^n) = O(x^{m+n})$	$O(x^3)\cdot O(x^8)\cdot O(x) = O(x^{12})$	
$O(x^n) = -O(x^n)$		
$cx^n \cdot O(x^m) = O(x^{m+n})$	$4x^2 \cdot O(x) = O(x^3)$	Tar inte hänsyn till konstanter.
$t = x^n \quad \Rightarrow \quad O(t^m) = O(x^{mn})$		Följer potenslagarna.

Generell metod – Gränsvärden

1. Gemensamma nämnare
2. Utveckla nämnare (så lite som möjligt – Lägg märke till graden.)
3. Utveckla täljaren (till samma grad som nämnaren)
4. Jämför nämnare och täljare - Förkorta

Exempel: Uppgift 3a från Tenta 2011-08-25 TATA42

Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)-2x}{x\arctan x}$ existerar ändligt samt beräkna gränsvärdet.

---

1. Gemensamma nämnare.	*Uttrycket är skrivet med gemensam nämnare.*
2. Utveckla nämnaren. Använder standardutveckling för $\arctan x$.	$x\arctan x = x\big(x+O(x^3)\big) = x^2+O(x^4) = x^2\big(1+O(x^2)\big)$
3. Utveckla täljaren till samma grad. Använder standardutveckling för $\ln(1+t)$	$ax=t\ ,\ \ \ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)$ $\ln(1+ax)-2x = ax-\dfrac{(ax)^2}{2}+O(x^3)-2x =$ $= (a-2)x-\frac{a^2}{2}x^2+O(x^3) = x^2\left(\frac{a-2}{x}-\frac{a^2}{2}+O(x)\right)$
4. Jämför nämnare och täljare - Förkorta	$\dfrac{\ln(1+ax)-2x}{x\arctan x} = \dfrac{x^2\left(\dfrac{a-2}{x}-\dfrac{a^2}{2}+O(x)\right)}{x^2\big(1+O(x^2)\big)} =$ $= \dfrac{\dfrac{a-2}{x}-\dfrac{a^2}{2}+O(x)}{1+O(x^2)}$ Eftersom $\frac{1}{x}\to\infty$ *då* $x\to 0$ måste $(a-2)=0$ för att ett ändligt gränsvärde ska existera. $(a-2)=0 \Leftrightarrow\ a=2$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2-2}{x}-\dfrac{2^2}{2}+O(x)}{1+O(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+O(x)}{1+O(x^2)} = -2$ (**Obs!** $O(x^2)=b(x)\cdot x^2$ där $b(x)$ är en begränsad funktion och $x^2\to 0$, alltså går $O(x^2)\to 0$.)
Svar:	-2

2.2 Tillämpning av Lagranges form på resttermen

Om man ska beräkna felet vid en approximation går det inte att längre att använda *Ordo* som restfunktion (man kan aldrig räkna ut vad Ordo blir). Vid problem där man måste beräkna felet ska (måste) man använda *Lagranges form* på resttermen.

Maclaurinutveckling med Lagranges form på resttermen:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(x) \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots + \boldsymbol{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}$$

Resttermen motsvarar alltså **felet** I approximationen.

Exempel: Från föreläsning 5, TATA42

Approximera integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{x^2} - 1}{x} dx$$

så att felet blir mindre än $1/1000$.

---

1. Maclaurinutvecklar funktionen (för komplex för att ta fram primitiv funktion). **Obs!** Man får chansa på hur långt man vill utveckla (och se hur stort felet blir).	Standard: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{e^\xi t^3}{3!}$, där $0 \le \xi \le t$ Här: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{e^\xi x^6}{3!}$ där $0 \le \xi \le x^2$ $\frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{e^\xi x^6}{3!} - 1}{x} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{e^\xi x^5}{6}$
2. Beräknar primitiva funktionen.	$\int_0^{1/2} x + \frac{x^3}{2} + \frac{e^\xi x^5}{6} dx$
3. Delar upp intergranden i två delar: 1) Approximationen och 2) resten/felet.	$\int_0^{1/2} x + \frac{x^3}{2} + \frac{e^\xi x^5}{6} dx = \int_0^{1/2} x + \frac{x^3}{2} dx + \int_0^{1/2} \frac{e^\xi x^5}{6} dx$
4. Beräknar resten (det är inte lönt att gå vidare om resten skulle vara större än 1/1000).	$\int_0^{1/2} \frac{e^\xi x^5}{6} dx = \left[\frac{e^\xi x^6}{36}\right]_0^{1/2} = \frac{e^\xi}{36} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 - 0 = \frac{e^\xi}{2304}$ Eftersom $0 \le \xi \le x^2$ och $0 \le x \le \frac{1}{2}$ innebär det att största möjliga värde för e^ξ är $e^{(1/2)^2} = e^{1/4} < 2$ Detta ger oss följande jämförelse: $\frac{e^\xi}{2304} < \frac{2}{2304} = \frac{1}{1152} < \frac{1}{1000}$ Felet är alltså OK enligt kravet!
5. Beräknar approximationen.	$\int_0^{1/2} x + \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right]_0^{1/2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{128}\right) = \frac{17}{128}$

Exempel: Uppgift 6, från Tenta 2011-05-28 TATA42

Bestäm ett närmevärde för längden av kurvan $y = \ln x\,, 5 \le x \le 10$, så att felet är mindre än $\frac{1}{1000}$.

1. Ställ upp uttryck för kurvlängden.	$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ $f(x) = \ln x\,, f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad s = \int_5^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_5^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx$
2. Maclaurinutvecklar uttrycket. Använder **Lagranges form** på resttermen för att kunna uppskatta felet.	$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(x)\cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{\boldsymbol{f^{(n+1)}(\xi)}}{\boldsymbol{(n+1)!}} \cdot \boldsymbol{x^{n+1}}$ **Vi testar med ordning 2:** $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{\boldsymbol{f^{(2)}(\xi)}}{\boldsymbol{(2)!}} \cdot \boldsymbol{x^2}$ **Substitution:** $\boldsymbol{\frac{1}{x^2} = t}$ **Beräknar derivator:** $f(t) = \sqrt{1+t} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$ $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{2}$ $f''(t) = -\frac{1}{4(1+t)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad f''(\xi) = -\frac{1}{4(1+\xi)^{3/2}}$ **Sätter in i Maclaurinutvecklingen:** $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}}t^2 \quad \Leftrightarrow$ $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{x^4}$
3. Ställer upp integralen. Delar upp den i *approximation* och *rest/fel*.	$s = \int_5^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_5^{10} 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^4}\,dx =$ $\int_5^{10} 1 + \frac{1}{2x^2}\,dx \quad - \quad \int_5^{10} \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^4}\,dx$ *Approximation* | *Rest/fel*
4. Uppskattar felet.	$\int_5^{10} \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \int_5^{10} \frac{1}{x^4}\,dx$ ξ är konstant och $0 \le \xi \le 1/x^2$, vilket gör att vi kan ställa upp jämförelsen: $\frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \int_5^{10} \frac{1}{x^4}\,dx \le \frac{1}{8} \int_5^{10} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_5^{10} = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3\cdot 10^3} - -\frac{1}{3\cdot 5^3}\right) =$ $= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{125} - \frac{1}{1000}\right) < \frac{1}{1000}$ Felet är alltså OK!
5. Beräknar approximationen.	$\int_5^{10} 1 + \frac{1}{2x^2}\,dx = \left[x - \frac{1}{2x}\right]_5^{10} = \left(10 - \frac{1}{20}\right) - \left(5 - \frac{1}{10}\right) = 5 - \frac{1}{20} + \frac{1}{10} =$ $= \frac{100 - 1 + 2}{20} = \frac{101}{20}$

2.3 Uppskatta värden

Med hjälp av Maclaurinutvecklingar kan man uppskatta värde på olika uttryck. Obs! Om man vill uppskatta felet får man ***inte använda ordoform*** på resttermen, utan föreslagsvis L**astranges restform**.

Exempel: Från föreläsning 5, TATA42

Beräkna värdet av $\sqrt{66}$ med ett fel mindre än $\frac{1}{1000}$.

Uträkning	Jämförelse med formler
$\sqrt{66} = \sqrt{64+2} = \sqrt{64\left(1+\frac{1}{32}\right)} = 8\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{2}}$ Modell: $f(x) = (1+x)^{1/2}$ $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}}{2!} \cdot x^2 \Leftrightarrow$ $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}} \cdot x^2$ $\sqrt{66} = 8f\left(\frac{1}{32}\right) = 8\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2\right) =$ $= 8\left(1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2\right) =$ $= 8 + \frac{1}{8} - (1+\xi)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2$ Där $8+\frac{1}{8}$ motsvarar approximationen och $(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2$ motsvarar felet, och $0 \leq \xi \leq 1/32$ $(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2 = \frac{1}{(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{32^2} \leq \frac{1}{32^2} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$ Felet är alltså inom det tillåtna intervallet.	**Maclaurinutveckling med Lastranges restform:** $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(x)\cdot\frac{x^2}{2!} + r(x)$ *där* $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}, \; och \;\; 0 \leq \xi \leq x$ **Derivator:** $f(x) = (1+x)^{1/2}, \quad f(0) = 1$ $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

Svar: $\sqrt{66} \approx 8 + \frac{1}{8}$

Anmärkning: Man hade kunnat utveckla med standardutveckling, dock behöver man ändå ta fram derivatan för att kunna tillämpa Lastranges restform…

Exempel: Uppgift **4a**, från Tenta 2011-06-09 TATA42

Bestäm ett rationellt tal som approximerar e^{-2} med ett fel som är mindre än $\frac{1}{10}$.

<table>
<tr><th>Uträkning</th><th>Jämförelse med formler</th></tr>
<tr><td>

Ansats: $f(x) = e^x$

Testar att utveckla till ordning 2.

$$e^x = f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{3!}x^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^x = f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{6}x^3$$

Sätter in $x = -2$

$$e^{-2} = f(-2) = 1 - 2 + \frac{(-2)^2}{2} + \frac{e^\xi}{6}(-2)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-2} = f(-2) = -1 + 2 + \frac{e^\xi}{6} \cdot -8 = 1 - \frac{4}{3}e^\xi$$

Felet här blev alltså $\frac{4}{3}e^\xi$, vilket är större än 1/10 oavsett värde på ξ.

Testar att utveckla till ordning 5.

$$e^x = f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^\xi}{6!}x^6$$

Tittar nu direkt på felet:

$$x = -2 \rightarrow \frac{e^\xi}{6!}(-2)^6 = e^\xi \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$$

$$= e^\xi \cdot \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 3} = e^\xi \cdot \frac{4}{45}$$

$$-2 \leq \xi \leq 0 \rightarrow e^\xi \cdot \frac{4}{45} \leq \frac{4}{45} < \frac{1}{10} \quad : \quad \text{OK!}$$

$$e^{-2} = f(-2) = 1 - 2 + \frac{(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3!} + \frac{(-2)^4}{4!} + \frac{(-2)^5}{5!} =$$

$$= 1 - 2 + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{(15 - 10 - 4)}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}$$

</td><td>

Maclaurinutveckling med Lastranges restform:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(x) \cdot \frac{x^2}{2!} + r(x)$$

$$där$$

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad och \ \ 0 \leq \xi \leq x$$

Derivator:

$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$

</td></tr>
</table>

Svar: $e^{-2} \approx \frac{1}{15}$

(I facit till uppgiften har de utvecklat $e^{-2} = (e^{-1})^2$ och fått fram att en tillräckligt god approximation är $1/9$, men metoden ovan borde vara fullt godkänd. $e^{-2} \approx 0{,}135$ vilket ger att alla svar mellan 0,035 och 0,235 borde räknas som godkänt.)

3. Differentialekvationer

3.1 Teori

Första ordningen – Integrerande faktor

När man tar fram lösning till en differentialekvation av första ordningen använder man sig av något som kallas *integrerande faktor*. Genom att förlänga båda led med den integrerande faktor kan man ta fram lösningen: y.

Lösningsgång:

Beskrivning	Allmänt	Exempel
1. Ställer upp ekvationen.	$y' + g(x)y = h(x)$	$y' + 4y = -2x$
2. Beräknar den primitiva funktionen till $g(x)$	$\int g(x)\,dx = G(x)$	$\int 4\,dx = 4x$
3. Ställer upp integrerande faktor	$e^{G(x)}$	e^{4x}
4. Förlänger båda sidor med den integrerande faktorn.	$y'e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = h(x)e^{G(x)}$	$y'e^{4x} + 4ye^{4x} = -2xe^{4x}$
5. Vänsterledet kan nu skrivas om som en derivata av en produkt. (Derivera så ser man att det stämmer)	$\left(ye^{G(x)}\right)' = h(x)e^{G(x)}$	$(ye^{4x})' = -2xe^{4x}$
6. Integrerar bägge led.	$ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)}$	$ye^{4x} = \int -2xe^{4x}\,dx = -2\int xe^{4x}\,dx =$ $= -2\left(\frac{xe^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4}dx\right) = -2\left(\frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16}\right)$ $= \frac{e^{4x}}{8} - \frac{xe^{4x}}{2}$
7. Löser ut y	$y = e^{-G(x)}\int h(x)e^{G(x)}$	$y = e^{-4x}\left(\frac{e^{4x}}{8} - \frac{xe^{4x}}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{x}{2}$
(8. Kontroll)	-	$y = \frac{1}{8} - \frac{x}{2} \Rightarrow \ y' = -\frac{1}{2}$ $y' + 4y = -\frac{1}{2} + 4\left(\frac{1}{8} - \frac{x}{2}\right) = -2x$
9. Svar	-	$y = \frac{1}{8} - \frac{x}{2}$

Anmärkning. Integrerande faktor är definierat för **första ordningens differentialekvationer**. Dock kan man använda metoden för differentialekvationer av högre ordningen om de är *karaktäristiska.* För att se sambandet kan man göra en variabelsubstitution.

Exempel: $y''' = x^2y'' + e^{-3x}$

$$y''' = x^2y'' + e^{-3x} \Leftrightarrow y''' - x^2y'' = e^{-3x} \Leftrightarrow /z = y'', z' = y'''/ \Leftrightarrow z' - x^2z = e^{-3x}$$

Exempel med komplett lösningsgång finns på sida 23.

Separabla differentialekvationer

Separabla differentialekvationer identifieras genom att de kan skrivas om till bara en faktor på varje sida.

Formell definition

En 1:a ordnings differentialekvation är separabel om det kan skrivas om i formen

$$g(y)y'(x) = h(x)$$

Lösning

$$g(y)y'(x) = h(x) \Leftrightarrow g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = h(x) \Leftrightarrow g(y) \cdot dy = h(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int g(y) \cdot dy = \int h(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad G(y) = H(y) + C$$

Slappdefinition: Om man kan dela upp ekvation med bara y på ena sidan och bara x på andra så är differentialekvationen separabel.

Exempel

Exempel: Boken, s388

$xy' = y^2 + 1, x > 0$

Villkor: $y(1) = 1$

Beskrivning	Uträkning
Identifierar differentialekvationen.	Vi ser att vi i VL har en funktion bestående av endast x samt y'. HL består av en funktion av endast y (och en konstant). Differentialekvationen är alltså separabel.
Byter ut $y' = \frac{dy}{dx}$ och flyttar om.	$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{x}dx$
Integrerar båda leden.	$\int \frac{1}{y^2+1}dy = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \arctan y = \ln x + C$
Använder villkoret för att bestämma konstanten.	Villkor: $y(1) = 1 \Rightarrow \ \arctan 1 = \ln 1 + C \ \Rightarrow = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow$
Svar:	$y = \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$

Homogen lösning

En homogen lösning innebär en lösning till differentialekvationen då $HL = 0$. Man ställer upp en karaktäristisk ekvation och beräknar dess rötter.

Differentialekvationer av andra ordningen

Rötterna till den karaktäristiska ekvationen ger följande lösningar:

$r_1 \neq r_2 \; (reella\, rötter) \;\Rightarrow\; y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$r_1 = r_2 \; (dubbelrot) \Rightarrow \; y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

$r = \alpha \pm \beta i \; (imaginära\, rötter) \Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Differentialekvationer av högre ordning

Samma som ovan fast med tillägget att en rots multiplicitet avgör polynomets grad, exempel:

$r_1 = r_2 = r_3 = a \Rightarrow y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^{ax}$

$r_1 = r_2 = a + i\beta \Rightarrow y = (C_1 x + C_2)e^{(\alpha + i\beta)}$

Partikulärlösningar

Ansats: Polynom

$y'' + ay' + by = p(x)$

Generellt sätt ansätter man y ett polynom av samma grad som högerledet.

Om ekvationen inte är ”komplett” så måste man kompensera för detta.

T.ex. $y'' + ay' = p(x)$

Här kommer y' ha samma grad som polynomet i högerledet, alltså ansatsen innebär att y har **en** grad högre än $p(x)$

T.ex. $y'' = p(x)$

Här kommer y'' ha samma grad som polynomet i högerledet, alltså ansatsen innebär att y har **två** grader högre än $p(x)$

Formell definition av ansats vid polynom

$y''(x) + ay'(x) + by(x) = p(x)$

$q(x)$ är vår ansats och $q(x)$ har samma grad som $p(x)$

a) $y(x) = q(x)$ om $b \neq 0$
b) $y(x) = x \cdot q(x)$ om $a \neq 0, b = 0$
c) $y(x) = x^2 \cdot q(x)$ om $a = b = 0$

Ansats: Exponentialfunktion

$y''(x) + ay'(x) + by(x) = e^{p(x)} \quad \Rightarrow \quad y = ze^{px}$

Ansats: Trigonometrisk funktion

$y''(x) + ay'(x) + by(x) = \sin kx \;\; eller \;\; y''(x) + ay'(x) + by(x) = \cos kx$

$\Rightarrow \; y = A \sin kx + B \sin kx$

Förskjutningsregeln

Förskjutningsregeln

$D^n(f(x)e^{ax} = e^{ax}(D+a)^n f(x)$

3.2 Exempel

Exempel: Uppgift 4 från Tenta 2011-03-19 TATA42

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - 3y'' + 2y' = 2x + 6x^2$.

Konstaterar främst att det finns en *homogen* lösning samt en *partikulärlösning* som kommer att vara ett polynom. Vi tar först fram den honomgena lösningen och därefter partikulärlösningen.

Beskrivning	Uträkning
1. Homogen lösning	$y''' - 3y'' + 2y' = 0$ har den karaktäristiska ekvationen: $r^3 - 3r^2 + 2r = 0 \Leftrightarrow r(r^2 - 3r + 2) = 0 \Leftrightarrow r(r-2)(r-1) = 0 \Leftrightarrow r = 0, 1, 2$ $y_h = C_1e^{0x} + C_2e^x + C_3e^{2x} = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x}$
2. Partikulärlösning	$HL = 2x + 6x^2$ Vi ser att högerledet är ett polynom av grad 2, alltså vore en ansats $y = ax^2 + bx + c$ rimlig. Eftersom det ”lägsta” vi har i VL är y' behöver vi höja polynomets grad ett steg. $\boldsymbol{Ansats}$: $y = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$ Tar fram derivator: $y = ax^3 + bx^2 + cx$ $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ $y'' = 6ax + 2b$ $y''' = 6a$ Sätter in i ekvationen: $y''' - 3y'' + 2y' = 2x + 6x^2 \Leftrightarrow$ $6a - 3(6ax + 2b) + 2(3ax^2 + 2bx + c) = 2x + 6x^2 \Leftrightarrow$ $6a - 18ax - 6b + 6ax^2 + 4bx + 2c = 2x + 6x^2$ Jämför term för term: $\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 6a = 6 \\ -18a + 4b = 2 \\ 6a - 6b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4b = 20 \\ 2c = 6b - 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ 2c = 30 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 12 \end{cases}$ $y_p = x^3 + 5x^2 + 12x$
Svar	$y = y_p + y_h$ $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x} + x^3 + 5x^2 + 12x$

Exempel: Uppgift 4 från Tenta 2011-05-28 TATA42

Bestäm lösningen till differentialekvationen $x^2y' + \sqrt{y} = \sqrt{y}\ln x\,, 0 < x < 1$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y\left(\frac{1}{2}\right) = (\ln 2)^2$.

Beskrivning	Uträkning
Identifierar differentialekvationen. **Obs!** Smidigast är att ha alla y på samma sida som y'…	Genom att flytta om lite kan vi få bara x och y' i VL respektive bara y i HL. $x^2y' + \sqrt{y} = \sqrt{y}\ln x \Leftrightarrow x^2y' = \sqrt{y}\ln x - \sqrt{y} \Leftrightarrow x^2y' = \sqrt{y}(\ln(x) - 1) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{y}}y' = \frac{\ln x - 1}{x^2}$
Byter ut $y' = \frac{dy}{dx}$ och flyttar om.	$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x - 1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot dy = \frac{\ln x - 1}{x^2} \quad dx$
Integrerar båda leden var för sig.	$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \int \frac{\ln x - 1}{x^2}\, dx$ $\textbf{VL)} \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = 2\sqrt{y}$ $\textbf{HL)} \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= \frac{1 - \ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1 - \ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + C$ $\Rightarrow \quad 2\sqrt{y} = -\frac{\ln x}{x} + C$
Använder villkoret för att bestämma konstanten.	Villkor : $y\left(\frac{1}{2}\right) = (\ln 2)^2 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{(\ln 2)^2} = -\frac{\ln 1/2}{1/2} + C \Leftrightarrow$ $\ln 2 = -\ln\frac{1}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \ln 2 + \ln\frac{1}{2} = \ln\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \ln 1 = 0$
Svar:	$2\sqrt{y} = -\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow y = \left(\frac{\ln x}{2x}\right)^2$

Exempel: Uppgift 5 från Tenta 2011-08-25 TATA42

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy'' + (x-1)y' = e^{-x}$, $\;> 0$

Beskrivning	Uträkning
Identifierar differentialekvationen.	$xy'' + (x-1)y' = e^{-x}$ Ekvationen innehåller *första* och *andra* ordningens derivator. Genom att göra en variabelsubstitution kan man forma om differentialekvationen till en första ordningens ekvation och använda sig av integrerande faktor. $y' = z, \qquad y'' = z' \qquad \Rightarrow \quad xz' + (x-1)z = e^{-x}$
Delar på x för att kunna isolera den integrerande faktorn.	$z' + \dfrac{(x-1)z}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x} \;\Leftrightarrow\; z' + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)z = \dfrac{e^{-x}}{x}$ $g = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right), \qquad G = \int \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)dx = x - \ln x$ Integrerande faktor: $e^{x - \ln x} = e^x \cdot e^{-\ln x} = \dfrac{e^x}{e^{\ln x}} = \dfrac{e^x}{x}$
Multiplicerar båda leden med den integrerande faktorn.	$z' \cdot \dfrac{e^x}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)z \cdot \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x} \cdot \dfrac{e^x}{x} \;\Leftrightarrow$ $\left(z \cdot \dfrac{e^x}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$
Integrerar båda leden och löser därefter ut z.	$\int \left(z \cdot \dfrac{e^x}{x}\right)' = \int \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \; z \cdot \dfrac{e^x}{x} = -\dfrac{1}{x} + C_1 \;\Leftrightarrow\; z = -\dfrac{1}{e^x} + \dfrac{C_1 x}{e^x} \;\Leftrightarrow$ $z = -e^{-x} + C_1 x e^{-x}$
Tar fram den primitiva funktionen till z. **Obs!** Här måste man ta lägga till yterliggare en konstant.	$z = y' \Leftrightarrow \; y = \int -e^{-x} + C_1 x e^{-x}\, dx = e^{-x} + \int C_1 x e^{-x} dx \;\Leftrightarrow$ $y = e^{-x} + C_1\left(-e^{-x}x - \int -e^{-x}dx\right) \Leftrightarrow$ $y = e^{-x} + C_1(-e^{-x}x - e^{-x}) + C_2 = e^{-x} - C_1 x e^{-x} - C_1 e^{-x} + C_2 \Leftrightarrow$ $y = (1 - C_1)e^{-x} - C_1 x e^{-x} + C_2$
Svar	$y = (1 - C_1)e^{-x} - C_1 x e^{-x} + C_2$

Anmärkning: Variabelsubstitutionen i inledningen är inte nödvändig, utan gör det endast enklare att se sambandet. Man hade lika gärna kunnat gå direkt till:

$$xy'' + (x-1)y' = e^{-x} \Leftrightarrow y'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y' = \frac{e^{-x}}{x} \Leftrightarrow \left(y' \cdot \frac{e^x}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y' \cdot \frac{e^x}{x} = \int \frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$y' = xe^{-x} \int \frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \int \left(xe^{-x} \int \frac{1}{x^2} dx\right) dx}$$

Obs! Specialfall

Ett märkligt fall är när den homogena lösningen till en differentialekvation sammanfaller med partikulärlösningen.

T.ex. differentialekvationen $\boldsymbol{y'' + 9y = \cos 3x}$.

Den **homogena** lösningen beräknas: $r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i3 \Rightarrow y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

Vanligtvis skulle man nu göra en ansats $\boldsymbol{y = A\cos kx + A \sin kx}$ för att ta fram **partikulärlösningen**, men detta hade gett samma svar som den homogena lösningen. För att beräkna partikulärlösningen här är det bästa sättet att göra en **komplex ansats**.

Den komplexa exponentialfunktionen definieras: $\boldsymbol{y = e^{iax} = \cos ax + i \sin ax}$. Här kan man utnyttja att funktionen har en **reell** del samt en **imaginär** del:

- $\mathrm{Re}\left(e^{i3x}\right) = \cos 3x$
- $\mathrm{Im}\left(e^{i3x}\right) = \sin 3x.$

Vi sätter upp en ny ekvation: $\boldsymbol{u'' + 9u = e^{3ix}}$. Om $\boldsymbol{u_p}$ står för partikulärlösningen så kan man med resonemanget ovan sluta sig till att $\boldsymbol{y_p = Re(u_p)}$

Nu löser man differentialekvationen $u'' + 9u = e^{3ix}$ med en vanlig ansats: $\boldsymbol{u = ze^{3ix}}$

$$u' = z'e^{3ix} + 3ize^{3ix} = (z' + 3iz)e^{3ix}$$

$$u'' = (z'' + 3iz')e^{3ix} + (z' + 3iz) \cdot 3i \cdot e^{3ix} = (z'' + 6iz' - 9z)e^{3ix}$$

Anmärkning: Här kan man också använda förskjutningsregeln för att ta fram u''

$$u'' = \mathrm{z}(D^2 + 2 \cdot i3 \cdot D^1 + (3i)^2)e^{3ix} = (z'' + i6z' - 9z)e^{3ix}$$

$$u'' + 9u = (z'' + 6iz' - 9z)e^{3ix} + 9ze^{3ix} = e^{3ix} \Leftrightarrow$$

$$z'' + 6iz = 1$$

Ansats: $\boldsymbol{z} =$ $\quad \Rightarrow \quad z' = k \quad \Rightarrow \quad z'' = 0$

$$0 + 6ik = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \frac{1}{i6} = \frac{i}{i^2 6} = -\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{6}}$$

$$z = -\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{6}}x$$

$$u_p = ze^{3ix} = -\frac{ix}{6}e^{3ix} = -\frac{ix}{6}(\cos 3x + i \sin 3x) = \frac{x}{6}\sin 3x - i\frac{x}{6}\cos 3x$$

$$y_p = Re\left(u_p\right) = \frac{x}{6}\sin 3x$$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{6}\sin 3x$

Exempel: Uppgift 3 från Tenta 2011-06-09 TATA42

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = \sin 2x$.

Beskrivning	Uträkning
1. Tar fram den homogena lösningen.	$y'' + 4y = 0$ $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm i2$ $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$
2. Tar fram partikulärlösning. **Obs!** Här hade man vanligtvis gjort en **trigonometrisk ansats**. Eftersom att den homogena lösningen är en trigonometrisk ansats får man istället göra en **komplex ansats**.	$y'' + 4y = \sin 2x$ $e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad Im(e^{2ix}) = \sin 2x$ **Ställer upp en *stödekvation*:** $u'' + 4u = e^{2ix}$ **Ansats:** $\boldsymbol{u = ze^{2ix}}$ $u'' = (z'' + i4z' - 4z)e^{2ix}$ **Sätter in i ekvationen:** $(z'' + i4z' - 4z)e^{2ix} + 4ze^{2ix} = e^{2ix} \quad \Leftrightarrow$ $z'' + i4z' = 1$ **Ansats:** $z = kx, \qquad z' = \boldsymbol{k}, \qquad z'' = 0$ $i4\boldsymbol{k} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = -\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{4}} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{4}}x$ $u_p = z \cdot e^{2ix} = -\frac{i}{4}x(\cos 2x + i\sin 2x) = \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{i}{4}x\cos 2x$ $y_p = Im(u_p) \Leftrightarrow y_p = Im\left(\frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{i}{4}x\cos 2x\right) = -\frac{1}{4}x\cos 2x$
3. Förenklar och svar.	$y = y_h + y_p$ $y = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x = \left(A - \frac{1}{4}x\right)\cos 2x + B\sin 2x$

4. Generaliserade integraler och numeriska serier

Det man ska kunna:

- Bestämma om en serie är konvergent eller inte
- Beräkna värdet av serie
- Bestämma fel vid approximation

I avsnitt fyra beskrivs endast hur man bestämmer om en serie är konvergent eller divergent. Hur man beräknar värdet av serier och bestämmer fel vid approximationer beskrivs i avsnitt 5 (potensserier) då metoderna i princip är samma.

4.1 Teori

Serier och integraler

Vid bedömning av konvergens och divergens kan integraler och serier behandlas snarlikt.

Sats: Integralkriteriet.

$$a)\ Om \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ är } konvergent, \text{så är} \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\ \ konvergent.$$

$$b)\ Om \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ är } divergent, \text{så är} \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\ \ divergent.$$

Begrepp:

$$Definition\ serie: \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

Konvergens: När delar från olika håll närmar sig varandra. En konvergent serie erhåller alltså ett värde när antalet termer går mot oändligheten

Divergens: Isärgående; spridning åt olika håll. En divergent serie får inte något ändligt värde när serien går mot oändligheten.

OBS! Innan man påbörjar någon beräkning måste man ha klart för sig om serien är ***positiv, varierande*** eller ***alternerande***.

Typ av serie	Definition	Exempel
Positiv serie	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots där\ a_k \geq 0$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots$
”Varierande” serie	*Har både positiva och negativa termer.*	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$
Alternerande serie	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ där\ a_k > 0\ för\ udda\ k = 1,3,5, \ldots$ $och\ a_k < 0\ för\ jämna\ k = 2,4,6, \ldots$ *(eller tvärtom)*	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Divergenstest (Gäller för alla typer av serier)

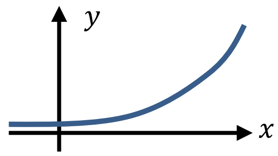
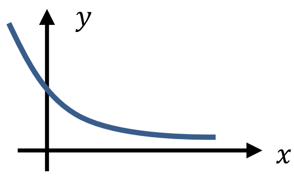
För en konvergent serie **måste** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Om inte växer serien hela tiden och går då mot oändligheten. Kriteriet innebär ett enkelt sätt att testa om en serie är divergent.

$$Om \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ är } serien \sum_{k=n}^{\infty} a_k \; divergent.$$

Geometriska serien (Kan vara positiv eller alternerande)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq^1 + aq^2 + aq^3 + \ldots \begin{cases} = \dfrac{a}{1-q} \; om \; |q| < 1 \\ divergent \; om \; |q| \geq 1 \end{cases}$$

Förhållandet ter sig ganska självklart om man jämför med en exponentialfunktion:

$y = aq^x \to \infty$ då $x \to \infty$ om $\lvert q \rvert > 1$	
$y = aq^x \to 0$ då $x \to \infty$ om $\lvert q \rvert < 1$	

Jämförelsesatser (Endast för positiva serier)

Jämförelsesats I

$$För \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; och \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ där } 0 \leq a_k \leq b_k \; gäller$$

$$\boldsymbol{a}) \; Om \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ är } konvergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; konvergent \left(och \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$$

$$\boldsymbol{b}) \; Om \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ är } divergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; divergent$$

Jämförelsesats II

$$För \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; och \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ där } a_k \geq 0, b_k \geq 0 \; och \; a_k = c_k \cdot b_k$$

$$\text{där } c_k \text{är ett ändligt gränsvärde gäller}:$$

$$\boldsymbol{a}) \; Om \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ är } konvergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; konvergent$$

$$\boldsymbol{b}) \; Om \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ är } divergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; divergent$$

Jämförelseserier:

A) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}dx$ är $\begin{cases} konvergent & \text{om } a > 1 \\ divergent & \text{om } a \leq 1 \end{cases}$

B) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^a}dx$ är $\begin{cases} konvergent & \text{om } a < 1 \\ divergent & \text{om } a \geq 1 \end{cases}$

Absolutkonvergens (Säger ingenting om serien är positiv... Bra om serien är varierande)

$$Om \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är en serie gäller:}$$

$$\boldsymbol{a})\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\ konvergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ konvergent$$

$$\boldsymbol{b})\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Obs! Bara för att en serie inte är absolutkonvergent behöver den inte vara divergent...

Rotkriteriet & Kvotkriteriet (Gäller för alla typer av serier)

$$\text{För serien } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ gäller att om}$$

$$a)\ \sqrt[k]{|a_k|} \to Q \text{ då } k \to \infty$$

$$b)\ \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to Q \text{ då } k \to \infty$$

$$\text{där } Q \text{ är ett reellt tal} \geq 0 \text{ gäller}$$

$$Q < 1 \Rightarrow \text{Serien är absolutkonvergent}$$

$$Q > 1, (Q = \infty) \Rightarrow \text{Serien är divergent}$$

Obs! Om $Q = 1$ säger testerna ingenting.

Testerna fyller samma funktion och fungerar på likadant sätt. Vilket man väljer beror av hur serien ser ut.

Liebniz Kriterium (Endast alternerande serier)

Liebniz kriterium innebär att **en serie är konvergent** om:

Kriterium	**Samband**
• Serien är alternerande	...
• Termernas belopp avtar (för stora n)	**Obs!** Kan visas på två sätt: ▪ $\lvert a_{n+1}\rvert < \lvert a_n\rvert$ ▪ $f'(x) < 0$
• Termerna går mot noll	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Obs! Bara för att kriterierna inte uppfylls måste inte serien vara divergent...

4.2 Bestämma om en serie är konvergent eller divergent

Strategi

Man kan inte använda alla verktyg på alla serier. Nedan beskrivs vilka verktyg man kan använda till vilka serier (det vanligaste verktyget till respektive typ är fetmarkerat).

Positiv	Varierande	Alternerande
Divergenstest	Divergenstest	**Liebniz Kriterium** (Divergenstestet ingår)
Jämförelsesatser	**Absolutkonvergens**	Absolutkonvergens
	Rotkriteriet & Kvotkriteriet	Rotkriteriet & Kvotkriteriet

(Brist på) entydighet

Metod	Bevisar
Divergenstestet	Bevisar om en serie är divergent. Kan inte visa att en serie är konvergent.
Jämförelsesatser	Kan bevisa både konvergens respektive divergens.
Absolutkonvergent	En serie som en absolutkonvergent är konvergent. En serie som **inte** är absolutkonvergent behöver **inte** vara divergent.
Liebniz Kriterium	Kan bevisa att en serie är konvergent. Serien behöver **inte** vara divergent bara för att kriterierna inte uppfylls.
Rot- & Kvotkriteriet	Kan visa både divergens respektive konvergens. Om $Q = 1$ säger testet ingenting.

Exempel

Exempel: Uppgift **5b** från Tenta 2012-01-14 TATA42

Avgör om $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ är konvergent.

Vi ser att serien är alternerande, då den innehåller termen $(-1)^n$. Första testet blir därför att titta på Liebniz kriterium.

Liebniz Kriterium

1. Serien är alternerande.

2. Termerna går mot noll.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$$

3. Termernas belopp avtar (för stora n)

$$|a_{n+1}| < |a_n| \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1-\sqrt{n+1}}\right| < \left|\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n-\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$

$$n-\sqrt{n} < n+1-\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} < 1+\sqrt{n}$$

Svar: Konvergent enligt Liebniz.

Exempel: Uppgift **5a** från Tenta 2012-01-14 TATA42

Avgör om $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^2+x}\,dx$ är konvergent.

Analogt med teorin för serier så gäller att divergenstestet även för integraler: Om $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ så är integralen divergent (annars hade den ju gått mot oändligheten…).

$$\textbf{Divergenstest}: \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1+1/x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Divergent$$

$$\textbf{Alternativ lösning}: \int_1^\infty \frac{x^2}{x^2+x}dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+1/x}dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{2x}dx\,, som \text{ är } divergent. (J\text{ä}mf\text{ö}relsesats\ I)$$

$$\textbf{Alternativ lösning}: \int_1^\infty \frac{x^2}{x^2+x}dx \geq \int_1^\infty \frac{x^2}{x^2+x^2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{2}dx\,, som \text{ är } divergent.$$

Exempel: Uppgift **6** från Tenta 2011-08-25 TATA42

För vilka $a \in \boldsymbol{R}$ är den generaliserade integralen $\int_0^\infty \cos(e^{ax})dx$ konvergent?

Integralen är generaliserad vid $x \to \infty$. Den inre funktionen $t = e^{ax}$ gör det naturligt att dela upp undersökningen i fall där a är *större*, *lika med* eller *mindre* än noll (eftersom $t = e^{ax}$ då är växande, konstant respektive avtagande).

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{ax} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \cos(1)dx\,, \qquad Divergent$$

$$\left(t.ex. enligt\ divergenstestet\text{: } \lim_{n\to\infty} \cos 1 = \cos 1 \neq 0\right)$$

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \backslash\, e^{ax} avtagande \,\backslash \quad \Rightarrow \quad 0 < e^{ax} < 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \cos(e^{ax})dx\,, \qquad Divergent$$

$$\left(Kan\ visas\ med\ t.ex. divergenstestet\text{: } \lim_{x\to\infty} \cos e^{ax} = \lim_{t\to 0} \cos t \neq 0\right)$$

Återstår $\boldsymbol{a > 0}$.

$$a > 0 \Rightarrow \backslash e^{ax}\ växande \,\backslash \Rightarrow \ 1 < e^{ax} < \infty \ \Rightarrow \int_0^\infty \cos(e^{ax})dx = \int_0^{\boldsymbol{n}} \cos(e^{ax})dx\,, \qquad \boldsymbol{n} \to \infty$$

Variabelsubstitution ger: $e^{ax} = t, \qquad = \frac{\ln t}{a}, \qquad dx = \frac{1}{at}dt$

Med nya ändpunkter: $x = 0 \ \Rightarrow \ t = 1 \qquad\qquad x = n \ \Rightarrow \ t = e^{an}$

$$\int_0^{\boldsymbol{n}} \cos(e^{ax})dx = \int_1^{\boldsymbol{e^{an}}} \cos(t)\cdot\frac{1}{at}\cdot dt = \frac{1}{a}\int_1^{\boldsymbol{e^{an}}} \frac{\cos(t)}{t}dt = \frac{1}{a}\left(\left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^{e^{an}} - \int_1^{e^{an}} -\frac{\sin t}{t^2}dt\right) =$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\sin e^{an}}{e^{an}} - \frac{\sin 1}{1} + \int_1^{e^{an}} \frac{\sin t}{t^2}dt\right)$$

Tittar vad som händer med de tre delarna var för sig när $n \to \infty$:

$$\frac{\sin e^{an}}{e^{an}} \to 0 \text{ då } n \to \infty \ (e^{an} \to \infty, 0 \le \sin e^{an} \le 1). \qquad\qquad -\frac{\sin 1}{1}, konstant$$

$$\int_1^{e^{an}} \frac{\sin t}{t^2}\ \text{är } varierande, kontrollerar\ absolutkonvergens!$$

$$\int_1^{e^{an}} \frac{|\sin t|}{t^2} \le \int_1^{e^{an}} \frac{1}{t^2}, som\ \text{är}\ konvergent \quad \Rightarrow \quad \int_1^{e^{an}} \frac{\sin t}{t^2}\ absolutkonvergent$$

Svar: Integralen är konvergent för $a > 0$

5. Potensserier

Potensserier är väldigt snarlikt geometriska serier. Skillnaden är en potensserie inkluderar en *variabel* som avgör seriens egenskaper.

Det man ska kunna:

- Bestämma för vilka värden på x som serien konvergerar eller divergerar: **konvergensradie.**
- Beräkna värdet av serie.
  - Ta hjälp av derivering/Intergering.
- Bestämma fel vid approximation.
- Lösa differentialekvationer med hjälp av potensserier.

5.1 Teori

Konvergensradie

- Vid **numeriska serier** har man en **bestämd** serie som man kontrollerar om den är divergent eller konvergent.
- Vid **potensserier** har man en serie som beror på en variabel. Här kontrollerar man **för vilka värden** på variabeln som serien konvergerar eller divergerar.
- **Samma verktyg används för att bestämma konvergens.**

$$För\ en\ potensserie\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\ gäller\ exakt\ ett\ av\ följande\ fall:$$

$\boldsymbol{a})$ $Det\ finns\ ett\ reellt\ tal\ \boldsymbol{R} > 0, sådant\ att\ serien\ är\ absolutkonvergent\ för\ |x| < \boldsymbol{R}$ $och\ divergent\ för\ |x| > \boldsymbol{R}, där\ talet\ \boldsymbol{R}\ kallas\ då\ seriens\ \boldsymbol{konvergensradie}.$

$\boldsymbol{b})$ $Serien\ är\ absolutkonvergent\ för\ alla\ reella\ tal\ x.$

$\boldsymbol{c})$ $Serien\ är\ divergent\ för\ alla\ reella\ tal\ x \neq 0\ (såklart\ konvergent\ för\ x = 0)$

Obs! Satsen säger ingenting om hur serien beter sig då $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{R}$, detta måste undersökas separat.

Derivata och primitiv funktion

För en potensserie med konvergensradien R och $|x| < R$ (den är konvergent) gäller följande:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k\, x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^{k+1}}{k+1} = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \frac{c_3 x^4}{4} + \ldots$$

Alla serierna har samma konvergensradie: *R.*

Värdet av en potensserie

Med hjälp av derivata och primitiva funktioner kan man beräkna värdet av potensserier. Man utnyttjar formeln för beräkning av en geometrisk summa och deriverar/tar fram primitiv funktion implicit.

För konvergenta serier där $|x| < 1$ gäller:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\,ln(1-x)$$

Maclaurinserier

De vanliga Maclaurinutvecklingarna kan skrivas som serier. Sambanden kan användas för att bland annat beräkna värdet av en serie.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$sin\,x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$cos\,x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \qquad för -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$$

$$arctan\,x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+x}, \qquad för -1 \leq x \leq 1$$

5.2 Konvergensradie

Exempel: Uppgift **6a** från Tenta 2012-01-14 TATA42

Avgör för vilka $x \in \mathbf{R}$ serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n}$ är konvergent.

Ställer upp kvotkriteriet för att ta fram ett värde på konvergensradien.	**Kvotkriteriet:** $\frac{\lvert a_{k+1}\rvert}{\lvert a_k\rvert} \to Q \text{ då } k \to \infty$ $\left\lvert\frac{nx^{n+1}}{7^{n+1}}\right\rvert \Big/ \left\lvert\frac{nx^n}{7^n}\right\rvert = \frac{n\lvert x^n x\rvert}{7^n \cdot 7} \cdot \frac{7^n}{n\lvert x^n\rvert} = \frac{\lvert x\rvert}{7} = Q < 1 \Leftrightarrow \lvert x\rvert < 7$
Serien är alltså absolutkonvergent för $\lvert x\rvert < 7$, och således divergent för $\lvert x\rvert > 7$. Dock måste man ta reda på vad som händer i ändpunkterna: $x = \pm 7$	$\boldsymbol{x = 7} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n7^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1,2,3, \ldots$ Växande och positiv: **Divergent!** $\boldsymbol{x = -7} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-7)^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n = -1, 2, -3, 4 \ldots$ **Divergent!**
Svar:	Serien är konvergent för $-7 < x < 7$

Exempel: Uppgift **4b** från Tenta 2012-01-14 TATA42

För vilka $x \in \mathbf{R}$ serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n}$ är konvergent. ?

Ställer upp kvotkriteriet för att ta fram ett värde på konvergensradien.	**Kvotkriteriet:** $\frac{\lvert a_{k+1}\rvert}{\lvert a_k\rvert} \to Q \text{ då } k \to \infty$ $\left\lvert\frac{4^{n+1+1}x^{2(n+1)}}{n+1}\right\rvert \Big/ \left\lvert\frac{4^{n+1}x^{2n}}{n}\right\rvert = \frac{4^n \cdot 4^2 \cdot x^{2n} \cdot x^2}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n \cdot 4 \cdot x^{2n}} =$ $= \frac{n4x^2}{n+1} = \frac{4x^2}{1+1/n} \to 4x^2 = Q < 1 \Leftrightarrow 4x^2 < 1 \Leftrightarrow \lvert x\rvert < \frac{1}{2}$
Således absolutkonvergent för $\lvert x\rvert < \frac{1}{2}$, och divergent för $\lvert x\rvert > \frac{1}{2}$. Kontrollerar nu ändpunkterna: $x = \pm 1/2$	$\boldsymbol{x = \pm\frac{1}{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot 4}{n} \cdot \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}$ som är **divergent**.
Svar:	Serien är konvergent för $-1/2 < x < 1/2$

5.3 Beräkna värde av potensserie

Exempel: Uppgift **6b** från Tenta 2012-01-14 TATA42

Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n-1}}$

Vi har n både som **koefficient** och **exponent** vilket leder tankarna till **derivata**. Målet nu är att matcha serien med en formel för att därefter kunnat beräkna värdet.

Uträkning	Jämförelse med formler
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ Serien stämmer överrens med formeln för $f'(x)$ för en allmän potensserie. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$

Svar: $16/9$

Exempel: Från föreläsning 11, TATA42

Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$

I serien finns n som **nämnare** och som **exponent**. Tankarna går då till **primitiva funktioner** av potensserier.

Uträkning	Jämförelse med formler
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ Serien stämmer överrens med formeln för $F(x)$ för en allmän potensserie. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\ln\left(1-\frac{1}{5}\right) = -\ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$	$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$

Svar: $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

Exempel: Uppgift **5c** från Tenta 2011-06-09 TATA42

Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}$

Vi skriver om serien och delar upp den:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Nu kan beräkna värdet av serierna var för sig.

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=2\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}=3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

När n finns både som koefficient och som exponent ser man att uttrycket påminner om en derivata. Nu gäller det att ”forma om” uttrycket så att det stämmer helt med uttrycken för funktion/derivata.

Uträkning	**Jämförelse med formler**
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ Jämfört med den deriverade formen av en potensserie ser vi att det skiljer sig två saker: a) Serien börjar vid $n=0$ istället för $k=1$ b) Exponenten är n istället för $k-1$ Vi vill nu forma om uttrycket så det stämmer överrens. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n=0\left(\frac{1}{3}\right)^0+1\left(\frac{1}{3}\right)^1+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots=$ $\displaystyle\left(\frac{1}{3}\right)\left(1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\displaystyle\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}$	$\displaystyle f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$ $\displaystyle f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ $\displaystyle F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-ln(1-x)$

Svar: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}+3=\mathbf{\frac{15}{4}}$

5.4 Differentialekvationer och potensserier

Genom att se en potensserie som en funktion kan man lösa differentialekvationer som innehåller produkter av x-termer och funktioner eller derivator.

Lösningsmetoden beskrivs först med ett ganska enkelt exempel (som man hade kunnat lösa mycket smidigare) och appliceras därefter på ett svårt exempel, där ansättning som en potensserie är enda (bästa) tillvägagångssättet.

Exempel: Uppgift 10.22 från boken (Forsling)

Bestäm alla lösningar i en potensserieform till differentialekvationen $y'' - y = x$ med villkoret att $y = 1$ och $y' = 0$ för $x = 0$.

1. Ansätter y som en potensserie.	$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 \ldots$
2. Bestämmer y''	$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x^1 + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 \ldots$ $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \ldots$
3. Anpassar y'' genom att göra ändringar i termerna (vi vill att summan ska börja vid $k = 0$).	$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$ ***Tänk:*** *Summorna ska börja med samma värde. $k = 2$ insatt i det vänstra uttrycket ska ge samma som $k = 0$ insatt i det högra.*
4. Sätter in uttrycken i differentialekvationen.	$y'' - y = x \Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x \Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - c_k x^k\right)$
5. Jämför termer mot termer. Detta görs smidigast genom att utveckla summan i VL och jämföra med HL.	$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1) c_k x^k - c_k x^k\right) =$ $= (2c_2 - c_0) + (6c_3 - c_1)x + \left((k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k\right)x^k + \ldots = x$ $\begin{matrix} x^0: \\ x^1: \\ x^k: \end{matrix} \begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ 6c_3 - c_1 = 1 \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k = 0 \end{cases}$
6. Använder begynnelsevillkoren.	Villkor: $y = 1$ och $y' = 0$ för $x = 0$ Sätter in i serierna: $y(\mathbf{0}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{0}^k = c_0 + c_1 \mathbf{0} + c_2 \mathbf{0}^2 + \ \ldots = c_0 = \mathbf{1}$ $y'(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k \mathbf{0}^{k-1} = c_1 + 2c_2 \mathbf{0}^1 + 3c_3 \mathbf{0}^2 + \ldots = c_1 = \mathbf{0}$
7. Bestämmer uttryck för c_k med hjälp av förhållandena i *steg 5* och värdena i *steg 6*.	$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ 6c_3 - c_1 = 1 \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1/2 \\ c_3 = 1/6 \\ c_{k+2} = \dfrac{c_k}{\left((k+1)(k+2)\right)} \end{cases}$

	$k=2 \quad \Rightarrow \quad c_{\mathbf{4}} = \frac{c_2}{3\cdot 4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{\mathbf{4}!}$ $k=3 \quad \Rightarrow \quad c_{\mathbf{5}} = \frac{c_3}{4\cdot 5} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{\mathbf{5}!}$ $c_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\boldsymbol{k}!}$
8. Skriver upp ett uttryck för funktionen.	$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots,\ där \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_k = \frac{1}{k!} \end{cases}$ $\Rightarrow y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
9. Skriver som en serie.	$\boldsymbol{y} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ **Svar**: $\boldsymbol{y} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k}$
(**10.** Förenkla svaret.) Enligt Maclaurinutveckling ser man att summan motsvarar en exponentialfunktion.	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} = e^x - 1 - x$ $1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} = 1 + (e^x - 1 - x) = e^x - x$ **Svar**: $\boldsymbol{y} = e^x - x$

Anmärkning 1: Definitionen av fakultet ger $0! = 1$

Anmärkning 2: Det svåraste steget vid beräkningen är att komma fram till ett uttryck för c_k. Här finns det ingen exakt metod, utan man får testa sig fram med olika värden på k för att kunna sluta sig till en lösning.

Exempel: Uppgift **6** från Tenta 2012-03-10 TATA42

Låt differentialekvationen $y'' - 2xy' - 4y = 0$, med begynnelsevillkoren $y(0)$ och $y'(0) = 1$, med en potensserieansats. Uttryck även lösningen med hjälp av elementära funktioner.

1. Ansätter y som en potensserie.	$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \ldots$
2. Bestämmer derivatorna: y' och y''	$y' = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 \ldots$ $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kx^{k-2} = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots$
3. Sätter in uttrycken i differentialekvationen.	$y'' - 2xy' - 4y = 0 \Leftrightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kx^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} - 4\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \Leftrightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kx^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4c_kx^k = 0 \Leftrightarrow$
4. Anpassar uttrycken. Vi måste ha: a) Samma exponent till x b) Summor med samma intervall.	$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kx^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k$ $\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2kc_k x^k$
5. Förenklar uttrycket.	$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4c_kx^k = 0 \Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \big((k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k - 4c_k\big)x^k = 0 \Leftrightarrow$
6. Bestämmer uttryck för c_k	Från uppgiften får vi begynnelsevillkor: $\begin{cases} y(0) = 0 & \Rightarrow \quad c_0 = 0 \\ y'(0) = 1 & \Rightarrow \quad c_1 = 1 \end{cases}$ Genom att jämföra med HL ser man att koefficienten till x^k måste vara noll. $(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k - 4c_k = 0 \Leftrightarrow (k+2)(k+1)c_{k+2} = 4c_k + 2kc_k \Leftrightarrow$ $c_{k+2} = \frac{4+2k}{(k+2)(k+1)} \cdot c_k$ Med hjälp av formeln ovan ska man nu komma fram till ett samband. Först ser man att $c_k = 0$ för jämna k. Detta kan visas: <table><tr><td>$\boldsymbol{k}$</td><td>c_k</td><td>$c_{\boldsymbol{k}+2} = \frac{4+2\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}+2)(\boldsymbol{k}+1)} \cdot c_k$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{k = 0}$</td><td>$c_0 = 0$</td><td>$c_2 = \frac{4+2\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}+2)(\boldsymbol{k}+1)} \cdot 0 = 0$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{k = 2}$</td><td>$c_2 = 0$</td><td>$c_4 = \frac{4+2k}{(k+2)(k+1)} \cdot 0 = 0$</td></tr></table>

	Osv… Återstår då att kontrollera *udda* k. <table><tr><td>$\boldsymbol{k}$</td><td>c_k</td><td>$c_{\boldsymbol{k}+2} = \frac{4+2\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}+2)(\boldsymbol{k}+1)} \cdot c_k$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$</td><td>$c_1 = 1$</td><td>$c_3 = \frac{4+2\cdot\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+2)(\mathbf{1}+1)} \cdot 1 = \frac{6}{3\cdot 2} = 1$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{k}=\mathbf{3}$</td><td>$c_3 = 1$</td><td>$c_5 = \frac{4+2\cdot\mathbf{3}}{(\mathbf{3}+2)(\mathbf{3}+1)} \cdot 1 = \frac{10}{5\cdot 4} = \frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{k}=\mathbf{5}$</td><td>$c_5 = \frac{1}{2}$</td><td>$c_7 = \frac{4+2\cdot\mathbf{5}}{(\mathbf{5}+2)(\mathbf{5}+1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{7\cdot 6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 3}$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{k}=\mathbf{7}$</td><td>$c_7 = \frac{1}{2\cdot 3}$</td><td>$c_9 = \frac{4+2\cdot\mathbf{7}}{(\mathbf{7}+2)(\mathbf{7}+1)} \cdot \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{18}{9\cdot 8} \cdot \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$</td></tr></table> Här ser man att vi verkar få fakultet i nämnaren för termerna. Nu gäller det bara att hitta ett samband mellan nämnaren och värdet på k. $\frac{1}{2!}, då\ k = 2$ $\frac{1}{3!}, då\ k = 5$ $1/4!, då\ k = 7$ … $1/n!, då\ k = 2n-1$ Slutsats: $c_{\boldsymbol{k}+2} = c_{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})+2} = c_{2n+1} = \frac{1}{n!}$
6. Ställ upp summa	$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$ $\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_{2n+1} = \frac{1}{n!} \end{cases} \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1}$
7. Jämför med standardserier.	Standard: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \cdot x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x e^{x^2}$
8. Svar:	$y = x e^{x^2}$

6. Formler

6.1 Standardprimitiver

Elementära funktioner

$f'(x)$	$f(x)$
$x^n, x \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

Fler primitiver

$f'(x)$	$f(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$f(x) \cdot f'(x)$	$\frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$

Partiell integration

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

6.2 Integralformler

Funktionstyp/Formel	Funktionskurva: $\boldsymbol{y = f(x)}$	Polär form: $\boldsymbol{r = h(\varphi)}$
Area	$A = \int_a^b f(x)\,dx$	$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} h(\varphi)^2\,d\varphi$
Kurvlängd	$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$	$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}\,d\varphi$
Rotationsvolym: **x-axeln**	$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$	$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta h(\varphi)^3 \sin\varphi\ d\varphi$
Rotationsvolym: **y-axeln**	$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$	$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta h(\varphi)^3 \cos\varphi\ d\varphi$
Rotationsarea: **x-axeln**	$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$	$A = 2\pi \int_\alpha^\beta h(\varphi) \sin\varphi \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}\,d\varphi$
Rotationsarea: **y-axeln**	$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$	$A = 2\pi \int_\alpha^\beta h(\varphi) \cos\varphi \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}\,d\varphi$

6.3 Jämförelseserier

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx \quad \text{är} \quad \begin{cases} konvergent & \text{om } a > 1 \\ divergent & \text{om } a \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \quad \text{är} \quad \begin{cases} konvergent & \text{om } a < 1 \\ divergent & \text{om } a \geq 1 \end{cases}$$

6.4 Standardgränsvärden

Standardgränsvärden

Standardgränsvärde	Omvänt
$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad x \to 0$	$\frac{\sin 1/t}{1/t} \to 1, \quad t \to \infty$
$\frac{\tan x}{x} \to 1, \quad x \to 0$	$\frac{\tan 1/t}{1/t} \to 1, \quad t \to \infty$
$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0$	$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \quad t \to \infty$
$\frac{e^x - 1}{x} \to 1, \quad x \to 0$	$\frac{e^{1/t} - 1}{1/t} \to 1, \quad t \to \infty$
$(1+x)^{1/x} \to e, \quad x \to 0$	$(1+1/t)^t \to e, \quad t \to \infty$
$x^a \ln x \to 0, \quad x \to 0^+ \ (a > 0)$	$(1/t)^a \cdot \ln 1/t = \frac{\ln(1/t)}{t^a} \to 0, \quad t \to \infty \ (a > 0)$
$\frac{\arcsin x}{x} \to 1, \quad x \to 0$	$\frac{\arcsin 1/t}{1/t} \to 1, \quad t \to \infty$
$\frac{\arctan x}{x} \to 1, \quad x \to 0$	$\frac{\arctan 1/t}{1/t} \to 1, \quad t \to \infty$

Hastighetstabell

Följande uttryck är rangordna i fallande ordning efter vilket som växer snabbast.

- n^n
- $n!$
- a^n
- n^a
- $\ln n$

Detta ger upphov till följande standardgränsvärden då $n \to \infty$

$$\frac{\ln n}{n^a} \to 0$$

$$\frac{n^a}{a^n} \to 0$$

$$\frac{a^n}{n!} \to 0$$

$$\frac{n!}{n^n} \to 0$$

Övrigt

$\sqrt[n]{n^a} \to 1, \text{då } n \to \infty$

6.5 Standardutvecklingar

	Funktion	Maclaurinutveckling	Skriven som serie
A	e^x	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$	$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
B	$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
C	$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
D	$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},$ $för -1<x\le 1$
E	$(1+x)^a$	$1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\binom{a}{4}x^4+\ldots$	$(1+x)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k$
F	$\arctan x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots$	$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$ $för -1\le x\le 1$

6.6 Övrigt

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Obs! $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

Exempel:

$$\binom{a}{3}=\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}$$

$$\binom{7}{5}=\frac{7(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)}{5!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=21$$

Binomialformeln

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Den komplexa exponentialfunktionen

$y=e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$, där

- $\mathrm{Re}(e^{iax})=\cos ax$
- $\mathrm{Im}(e^{iax})=\sin ax$