Mattehjälpen

Crash Course

TATA82 Diskret matematik

VT2019 – CC #2

Rekursiva- / differensekvationer

- Format: $\underbrace{a_{n+4} + 3a_{n+2} - a_n}_{VL} = \underbrace{5n}_{HL}$, $n \geq 0$, $\underbrace{a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2}_{\text{Begynnelse-värden (BV)}}$
- Alltid 1 uppgift på tentan !

Metod

1) Dela upp i homogen lösning $a_n^{(h)}$ och partikulär lösning $a_n^{(p)}$
2) Bestäm $a_n^{(h)}$ via karaktäristisk ekvation (KE)
3) Bestäm partikulär ansats beroende på HL och KE
4) Bestäm $a_n^{(p)}$ med hjälp av partikulär ansats
5) Lös ut koefficienter till $a_n^{(h)}$ m.h.a. begynnelsevärden
6) Slå ihop $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ för att få svaret !

Exempel 2015-10-22 #3

Lös ekv. $\underbrace{a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n}_{VL} = \underbrace{3n}_{HL}$, $n \geq 0$, $\underbrace{\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}}_{BV}$

1) Dela upp i $a_n^{(h)}$ och $a_n^{(p)}$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

(Detta är OK pga. superpositionsprincipen)

2) Bestäm $a_n^{(h)}$ via KE

$$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$$

ger KE: $r^3 - 6r^2 + 11r^1 - 6r^0 = 0$ ← alltid 0 pga. homogen ekvation

(Minstet är: börja på lägsta numreringen av a_n $\Rightarrow$ det motsvarar r^0)

2) forts.

Exempelvis ger KE: $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-4} = 5$ ger KE: $r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r^0 = 0$

Varje steg i numrering motsvarar en potens av r

Vi får KE: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

Löser KE: $(r-1)(r-2)(r-3) = 0$

Notera rötter och multiplicitet: hur många gånger roten förekommer

$$\begin{cases} r_1 = 1, & m_1 = 1 \\ r_2 = 2, & m_2 = 1 \\ r_3 = 3, & m_3 = 1 \end{cases}$$

rötter, multiplicitet

Varje par av rot & multiplicitet ger en term i $a_n^{(h)}$:

$r_1 = 1,\ m_1 = 1 \Rightarrow A \cdot 1^n$

polynom av grad m − 1, rot upphöjd till n

$r_2 = 2,\ m_2 = 1 \Rightarrow B \cdot 2^n$

$r_3 = 3,\ m_2 = 1 \Rightarrow C \cdot 3^n$

$\therefore a_n^{(h)} = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n$ ■

Just nu är dessa godtyckliga konstanter. Vi löser ut dem senare!

3) Bestäm partikulär ansats

HL är alltid på formen polynom · exponentialuttryck

HL: $3n$

polynom, exponent?

Vi ser att $3n = 3n \cdot 1^n$ // Lätt att missa!

3) forts

HL: $3n \cdot 1^n$

polynom: $3n$

exponentbas: 1

Fall 1: exponentbas är rot till KE, med multiplicitet m
$\Rightarrow$ ansats $a_n^{(p)} =$ polynom $\cdot$ exponentbas$^n \cdot n^m$
(polynom: samma grad som polynom i HL)

Fall 2: exponentbas är inte rot till KE.
$\Rightarrow$ ansats $a_n^{(p)} =$ polynom $\cdot$ exponentbas^n

Exponentbas 1 är rot till KE med multiplicitet $m = 1$
$\Rightarrow$ ansatt $a_n^{(p)} = (Dn + E) \cdot 1^n \cdot n^1$
($Dn+E$: polynom grad 1; 1^n: exponentbas; n^1: multiplicitet)

$= Dn^2 + En$ ∎

4) Bestäm $a_n^{(p)}$

Vi vet: $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$ (1)

Vi har: $a_n^{(p)} = Dn^2 + En$. (2)

Vill bestämma D och E $\Rightarrow$ stoppa in (2) i (1)

VL: $D(n+3)^2 + E(n+3) - 6[D(n+2)^2 + E(n+2)] + 11[D(n+1)^2 + E(n+1)] - 6[D(n)^2 + E(n)]$

HL: $3n$ (sen innan)

Identifiera koefficienter i VL och HL:

n^2: $D - 6D + 11D - 6D = 0$

n^1: $6D - 24D + 22D + E - 6E + 11E - 6E = 3$

n^0: $9D - 24D + 11D + 3E - 12E + 11E = 0$.

4) forts

Ekv. sys. $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4D = 3 \\ 2E = 4D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{3}{4} \\ E = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\therefore a_n^{(p)} = Dn^2 + En = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n$ ■

5) Lös ut koefficienter till $a_n^{(h)}$

Vi vet: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$= A + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n$

Använd givna B.V.

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n(0) = 1 \\ a_n(1) = 1 \\ a_n(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B \cdot 2^0 + C \cdot 3^0 + \frac{3}{4} \cdot 0^2 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 1 \\ A + B \cdot 2^1 + C \cdot 3^1 + \frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 \\ A + B \cdot 2^2 + C \cdot 3^2 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A = 29/8 \\ B = -3 \\ C = 3/8 \end{cases}$

$\therefore a_n^{(h)} = \frac{29}{8} - 3 \cdot 2^n + \frac{3}{8} \cdot 3^n$ ■

6) Slå ihop $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

Svar: $a_n = \left[a_n^{(h)}\right] + \left[a_n^{(p)}\right]$

$= \left[\frac{29}{8} - 3 \cdot 2^n + \frac{3}{8} \cdot 3^n\right] + \left[\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n\right]$, $n \geq 0$ från ursprungliga frågan!

Kombinatorik

- Kombinationer – "utan ordning"
- n saker, välj ut k st : $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

- Permutationer – "med ordning"
- n saker, välj ut k st: $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exempel 2016-08-18 #3

8 pers ska arbeta på fest. Det finns 4 uppgifter.
Varje uppgift måste göras av en person.
Hur många sätt kan de fördela uppgifterna?

Lösning

Tänk 4 uppgifter ≈ 4 lådor

Alltid bra att rita upp problemet! Tänka visuellt hjälper i kombinatorik

1	2	3	4
Kan välja vem som helst av de 8 personerna	Kan välja vem som helst utom första	Kan välja alla utom första och andra	Kan välja alla utom första, andra och tredje
⇒ 8 val	⇒ 7 val	⇒ 6 val	⇒ 5 val

∴ Totalt $8 \times 7 \times 6 \times 5$ sätt

Exempel 2015-08-20 #3

Låda med 9 vita och 6 svarta bollar. Välj 5 st.

a) På hur många sätt kan man välja 3 vita och 2 svarta?

b) På hur många sätt kan man välja max 2 vita?

Lösning

a) Välja 3 vita ur 9 vita totalt: $\binom{9}{3}$

Välja 2 svarta ur 6 svarta totalt: $\binom{6}{2}$

Svar: $\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} = \frac{9!}{3!\,6!} \times \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{9!}{3!\,2!\,4!} = \underbrace{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4}_{=1260}$

b) Välja max 2 vita

= # Välja 0 vita (och därmed 5 svarta)

\+ # välja 1 vita (och därmed 4 svarta)

\+ # välja 2 vita (och därmed 3 svarta)

$= \binom{9}{0}\binom{6}{5} + \binom{9}{1}\binom{6}{4} + \binom{9}{2}\binom{6}{3}$

Binära följder och funktioner

- Följd av symboler med given längd, t.ex.: $\underbrace{1\,1\,0\,0\,1}$

binär följd (0/1) av längd 5 (antal)

Exempel 2017-05-30 #3a

Hur många följder med symbolerna {0, 1, 2} av längd 100 finns det, om de första 10 siffrorna är 1111000222

Lösning

- Rita upp följd: $\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 2\ 2}_{\text{plats 1–10 tagna}}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _}_{\text{plats 11–100 lediga}}$

Lösning forts

Plats 11: antingen 0, 1, 2 $\Rightarrow$ 3 val
12: antingen 0, 1, 2 $\Rightarrow$ 3 val
⋮
100: antingen 0, 1, 2 $\Rightarrow$ 3 val

- Totalt plats 11 – 100 = 90 platser
- Varje plats $\hat{=}$ 3 val

$\therefore$ Svar: $3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^{90}$ möjliga val

Exempel 2017-05-30 #3c
Hur många funktioner $f: A = \{1, 2, \dots, 100\} \to B = \{0, 1, 2, 3\}$ finns det om alla tal 91 t.o.m. 100 avbildas på 0?

Lösning

- Funktion relaterar input till output

$A = \{1, 2, \dots, 100\} \to B = \{0, 1, 2, 3\}$

- Vill ha så att:

1 → 0, 1, 2 eller 3
2 → 0, 1, 2 eller 3
⋮
90 → 0, 1, 2 eller 3

} 90 st med vardera 4 st val

91 → 0
92 → 0
⋮
100 → 0

} 10 st med vardera 1 st val

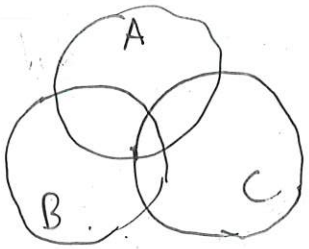
$\therefore$ Svar: Det finns $4^{90} \cdot 1^{10} = 4^{90}$ st funktioner

Principen om inklusion och exklusion (PIE)

- "På hur många sätt kan man välja/ordna ... så att ..."
- Idé: summera alla mängder (inklusion)
  och dra bort dubbelräknade mängder (exklusion)

Exempel

- Vi har



och söker $|A \cup B \cup C| =$
("storleken"/arean av figuren)

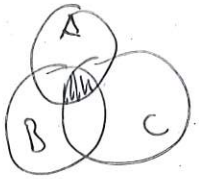
- Lägg ihop

$= |A| + |B| + |C|$

- Nu är dock dubbelräknade
  ⇒ dra bort dessa!

$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$

- Drog bort för mycket



en gång
⇒ lägg tillbaka!

$+ |A \cap B \cap C|$

$\therefore$ Generellt: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

$- [|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots]$

alternerande + och −

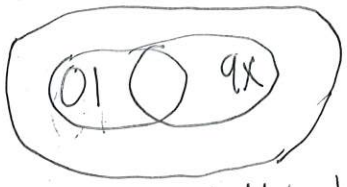
$+ [|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots]$

Exempel 2012-05-30 #3

På hur många sätt kan man ordna symbolerna
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X\}$ så att mönstret inte innehåller 01 eller 9X

Lösning

- Idé: beräkna alla möjliga kombinationer
  dra bort alla kombinationer där 01 eller 9X finns
  = kombinationer utan 01 eller 9X



U = alla kombinationer

- Formellt: $|U| - |01 \cup 9X|$
  $= |U| - [|01| + |9X| - |01 \cap 9X|]$

Enligt PIF

- Totalen U: 11 symboler $\{0, 1, \ldots, 9, X\}$
  Ska göra följd med 11 platser
  Plats 1: kan välja 1 av 11 symboler
  2 1 av 10 symboler
  ⋮
  11 1 av 1 symboler

  $\Rightarrow$ 11! sätt

- Kombinationen 01: Bilda symbolen 01 (av 0 och 1)
  (Tvingar den att förekomma!)
  Nya symboler: $\{01, 2, \ldots, 9, X\}$
  10 symboler $\Rightarrow$ 10! sätt (enligt ovan)

- Kombinationen 9X: Bilda symbolen 9X (av 9 och X)
  Nya symboler: $\{0, 1, \ldots, 8, 9X\}$
  10 symboler $\Rightarrow$ 10! sätt (enligt ovan)

Lösning, forts.

- Kombinationen 01 och 9X:

  Bilda symbolerna 01 och 9X (av 0, och 1 respektive 9 och X)

  Nya symboler: $\{01, 2, 3, \ldots, 8, 9X\}$

  9 symboler $\Rightarrow$ 9! sätt

  Dessa dras bort då $|01|$ kan "råka" innehålla 9X och $|9X|$ kan "råka" innehålla 01

- Svar: Kombinationer utan 01 eller 9X

  $= |$ Alla kombinationer $|$ $-$ $|$ komb. med 01 eller 9X $|$

  $= |U|$ $- [|01| + |9X| - |01 \cap 9X|]$

  $= 11!$ $- [10! + 10! - 9!]$