Lösningsgång

TANA21 – Beräkningsmatematik

Tenta – 2015-08-24

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

1) a) $\bar{a} = 150824$

$\frac{\Delta a}{a} = 1,2$

$\frac{\Delta a}{a} \approx \frac{\Delta a}{\bar{a}} = 1,2 \iff \Delta a = 1,2 \cdot 150824 = 180988,8$
$= 0,18 \cdot 10^7$

Ger 0 k.D. som ger
$6-7=-1<0$. så 0 s.s.

b) $\underline{\underline{1,51 \cdot 10^5}}$

c)

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\|x\|_\infty = 7$
$\|x\|_1 = 11$
$\|x\|_2 = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$

d) Den ena är till för ~~att~~ beräkna integraler
approximera
och den andra differentialekvationer.

e) $y'' = 2y' - \frac{y}{x}$ $y(1)=4$ $y'(1)=1$

$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = y \\ v = u' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = v & u(1)=4 \\ v' = 2v - \frac{u}{x} & v(1)=1 \end{cases}$

2) a)

$A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$

$\bar{}$

$r = 1{,}5 \pm 0{,}03 \qquad \alpha = 0{,}22 \pm 0{,}01$

$\bar{A} = \frac{1{,}5^2}{2}\left(0{,}22 - \sin 0{,}22\right) = 0{,}0019916\ldots \sim$

$|\Delta A| \leq \left|\frac{d}{dr}\,\Delta r\right| + \left|\frac{d}{d\alpha}\,\Delta\alpha\right|$

$A'_r = r(\alpha - \sin\alpha) = 1{,}5\left(0{,}22 - \sin 0{,}22\right) \approx 0{,}0026\ldots$

$A'_\alpha = \frac{r^2}{2}\left(1 - \cos\alpha\right) \approx \frac{1{,}5^2}{2}\left(1 - \cos(0{,}22)\right) \approx 0{,}02711$

$|\Delta A| \leq 3{,}508\ldots \cdot 10^{-4} \leq 3{,}51 \cdot 10^{-4}$

$A = 0{,}0020 \pm 0{,}000351$

RB

hoja!

b)

$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathcal{X}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} =$

$\mathcal{X}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 9{,}4 \cdot 0{,}6117$

$\|\Delta b\|_\infty = 0{,}05 \quad \|b\|_\infty = 39{,}5 \quad = 0{,}00727\ldots \approx 0{,}0073$

3

x	2	3	4	5
$f(x)$	0,53	1,19	1,53	1,68

a) $f(3,3)$.

medelvärdet

$$p(x) = c_1 + c_2(x - 3,5)$$

$$p(2) = c_1 - 1,5c_2 = 0,33$$

$$p(3) = c_1 - 0,5c_2 = 1,19$$

$$p(4) = c_1 + 0,5c_2 = 1,53$$

$$p(5) = c_1 + 1,5c_2 = 1,68$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1,5 \\ 1 & -0,5 \\ 1 & 0,5 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1,5 & -0,5 & 0,5 & -1,5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 1,19 \\ 1,53 \\ 1,68 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1,5 & -0,5 & 0,5 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1,5 \\ 1 & -0,5 \\ 1 & 0,5 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1,5 & -0,5 & 0,5 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,33 \\ 1,19 \\ 1,53 \\ 1,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,73 \\ 2,195 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = 1,1875$$

$$c_2 = 0,439$$

Sei

$$\underline{p(x) = 1{,}1875 + 0{,}439\,(x - 3{,}5)}$$

$$p(3{,}3) = \cancel{1{,}7872}\ 1{,}0997$$

b) $p(x) = c_1 \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} + c_2 \frac{(x-2)(x-4}{(3-2)(3-4}$

$+ c_3 \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} = \left/ c_1 = 0{,}33,\ c_2 = 1{,}19\ \ c_3 = 1{,}53 \right/$

$= \frac{0{,}33}{2}(x-3)(x-4) - \frac{1{,}19}{}(x-2)(x-4)$

$+ \frac{1{,}53}{2}(x-2)(x-3) = 1{,}31195 \approx \cancel{1{,}31}\ \underline{1{,}34}66$

c) $S(h) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + \quad + f(x_2)\right)$

$h = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{3}(\ \ldots\ldots\ ) = 2{,}2\ldots$

$|\Delta z| \leq \frac{1}{3}\left(|\Delta x_0| + 4|\Delta x_1| + |\Delta x_2|\right) = \underline{\underline{0{,}01}}$

d) $Dof(x) = \frac{f(4+1) - f(4-1)}{2} = \frac{1{,}19 + 1{,}68}{2} = +0{,}245$

4) $y(0{,}2)$ $h=0{,}1$ $y'=x+2y$ $y(0)=1$

$$y_{i+1}=y_i+h_i\,f(x_{i+1},y_{i+1})=y_i+h_i\,(x_{i+1}+2y_{i+1})$$

$$=y_i+h_ix_{i+1}+2h_i\,y_{i+1} \iff y_{i+1}-2h_iy_{i+1}$$

$$=y_i+h_ix_{i+1} \iff y_{i+1}=\frac{y_i+h_ix_{i+1}}{1-2h_i}$$

$$y_1=\frac{y_0+h\,x_1}{1-2h}=1{,}2625$$

$$y_2=\frac{1{,}2625+0{,}1\cdot 0{,}2}{1-2\cdot 0{,}1}\approx \underline{\underline{1{,}603125}}$$

b) $4x=x^3+1 \iff x^3+1-4x=0$

rot $x^* \approx 0{,}25$ fel $\leq 10^{-7}$

$f(x)=x^3+1-4x$
$f'(x)=3x^2-4$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow$$

$$x_1=0{,}25-\frac{x^3+1-4x}{3x^2-4} \quad x=0{,}25$$

$x_2=0{,}2541\ldots$

$$|\bar{x}-x^*|\leq\left|\frac{f(\bar{x})}{f'(\xi)}\right|\approx\left|\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|\approx 2{,}24\cdot 10^{-12}$$

c) $f(x)=0$

$x_{i+1} = \varphi(x_i)$

$\varphi(x) = x$

$\Rightarrow \quad x = \frac{x^3+1}{4}$ vilken konvergerar mot roten.

5 a)

n	128	256	512	1024
t	0,0051	0,063	0,71	5,3

Ansatt: $a_p n^p$

$\Rightarrow \quad t(2n)/t(n) = 2^p$

vilket ger

$t(512)/t(256) = \frac{0,71}{0,063} = 11,269$

$t(256)/t(128) = 12,35\ldots$

Dvs. $2^p = 12$ ~~$\Rightarrow$~~

$t(1024)/t(512) = 8\ldots \quad \underline{p = 3}$

b) Runges fenomen uppstår i kanterna.

d) $\frac{f(4h)-f(2h)}{f(2h)-f(h)} \approx 2^p \Rightarrow 2^p = 8,27 \Rightarrow \underline{p=3}$

6 a) Pivotering bör användas då pivotelementet används som multiplikator. Och således bör det största värdet användas för att minska fel i lösningen och beräkningarna

b) Går vi att lösa om integralen beräknas på olika intervall