Linjär algebra – TATA31 (del2)

0 – Allmänt

Följande delar behöver man kunna utöver avsnitten som beskrivs senare i dokumentet.

- Matrisekvationer och Gauss-elimination
  - Parameterform
- Allmänt om vektorer
  - Räknelagar
  - Komposantuppdelning
  - Ortogonalprojektion
- Teori om linjer och plan
- Räknelagar för matriser
  - Addition & Multiplikation
  - Invers
  - Transponat
  - Enhetsmatrisen
- Determinanter

1 – Vektorrum

1,1 – Vektorrum

Vektorrum innebär helt enkelt ett rum där vektorer bor: En mängd vektorer. För vektorer i ett vektorrum gäller två regler:

Definition	Förklaring
$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbf{V}$	Adderar man två vektorer blir summan en vektor som finns i rummet
$\lambda \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in \mathbf{V} \Rightarrow \lambda\mathbf{u} \in \mathbf{V}$	Multiplicerar man en vektor med en konstant blir tillhör den nya vektorn fortfarande mängden.

Vektorrum beskrivs vanligen som ***höljen*** eller som ***lösningsrum***.

Exempel: $\mathbf{V} = \{\underbrace{\mathbf{x} \in \mathbf{R^4}}: \underbrace{x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0}\} = \underbrace{\left[\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\; \mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]}$

Vektorrummet **V** består av vektorer $\mathbf{x}$ som finns i $\mathbf{R}^4$

Villkor som gäller för alla vektorer i vektorrummet.

Alla vektorer som finns i vektorrummet kan bildas genom kombination av dessa vektorer. Kallas ett *hölje*. Består av *baser* för rummet. *(Obs! Ej nödvändigvist ON-baser, se avsnitt 2,1.)*

Beroende av situation och uppgift är det gynnsamt att beskriva vektorrummet på ett visst sätt. Nedan beskrivs hur man "byter form" på vektorrummet.

Från lösningsrum till hölje och tillbaka…

Exempel: Beskriv följande vektorrum som ett hölje: $\mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R^4}: x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0\}$

Vektorrummet består av alla vektorer som ***uppfyller villkoret*** $x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0$. Nu ska vi ta reda på vilka vektorer som *skapar vektorer som uppfyller villkoret*. Detta görs genom parametrisera ekvationen:

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_2 + 2x_3 + 4x_4\\r\\s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3r + 2s + 4t\\r\\s\\t\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Alltså: Med dessa tre paramterar kan man skapa alla vektorer som stämmer in på villkoret. Detta blir då *baserna* som *spänner upp höljet* för vektorrummet.

Svar: $\mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R^4}: x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0\} = \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\; \mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

Exempel: Beskriv vektorrummet som ett lösningsrum: $\mathbf{V} = \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}]$

Nu vet vi baserna av vilka vi kan skapa vektorer som ingår i vektorrummet. Vi vill alltså hitta ett villkor för dessa vektorer. Detta görs genom att ställa upp en matrisekvation.

Teori: Alla vektorer i vektorrummet kan skapas genom de tre vektorerna som spänner upp höljet. En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ kan alltså skapas genom kombination av v_1, v_2 och v_3. Detta ger ekvationen:

$$\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \lambda_3\mathbf{v_3} = \mathbf{v}$$

Den godtyckliga vektorn $\mathbf{v}$ kan uttryckas $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$. Detta gör att vi kan ställa upp följande matrisekvation:

$$\begin{pmatrix}3&2&4\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&4&x_1\\1&0&0&x_2\\0&1&0&x_3\\0&0&1&x_4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&x_1-3x_2-2x_3-4x_4\\1&0&0&x_2\\0&1&0&x_3\\0&0&1&x_4\end{array}\right)$$

För alla vektorer man kan skapa med baserna gäller alltså villkoret $x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0$, vilket motsvarar villkoret för lösningsrummet.

Svar: $\mathbf{V} = \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : \mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 - 2\mathrm{x}_3 - 4\mathrm{x}_4 = 0\}$

1,2 – Linjärt beroende/oberoende

När man pratar om mängder och höljen är den centralt att titta på om vektorerna är *linjärt beroende* eller *linjärt oberoende*. Vektorer som är ***linjärt beroende*** kan ***uttryckas med varandra***, vilket inte går med vektorer som är ***linjärt oberoende***.

Definition	**Förklaring**
Vektorer är ***linjärt oberoende*** om *beroendeekvationen* $$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$ endast har den triviala lösningen $$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$ Om beroende ekvationen ar fler lösningar är vektorerna ***linjärt beroende***.	Poängen med beroende ekvationen är att se om det finns flera möjligheter att skapa *nollvektorn*. Om den enda möjligheten att skapa nollvektorn är att alla vektorer är noll innebär det att vektorerna är *linjärt oberoende* då ingen kan uttryckas med någon annan. Om det är möjligt att skapa nollvektorn som en kombination av de olika vektorerna är vektorerna linjärt beroende.

2 – Euklidiska rum

Ett euklidiskt rum är ett reellvärt vektorrum där en skalärprodukt är definierad.

2,1 – ON-baser

För att baser ska kallas ON-baser måste de uppfylla två kriterier:

- Vara ortonormala till varandra
- Ha längden (absolutbeloppet) 1.

Gram-Schmidts-Ortogonaliseringsprocess

Exempel: Bestäm en ON-bas till vektorrummet **V** $= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R^4}: -\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 + 4\mathrm{x}_4 = 0\}$**.** Fyll därefter ut till en bas för hela $\mathbf{R}^4$.

Först skriver vi om lösningsrummet till ett hölje av vektorer. Dessa vektorer är baser för vektorrummet, men inte nödvändigtvis ON-baser.

$$-\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 + 4\mathrm{x}_4 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}_1 = 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r + 2s + 4t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

V$= \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathbf{e}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$**,** vilket är baser för vektorrummet. Med dessa vektorer kan man skapa alla vektorer som uppfyller ekvationen från lösningsrummet. Baserna är dock inte ortonormala. För att bestämma ON-bas för vektorrummet använder man sig av *Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess*.

Steg	Uträkning
I. Normera Vi väljer den första vektorn från höljet och normerar.	$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$
II. Fyll ut Vi väljer nästa vektor och ”fyller ut” det vi redan har.	$V_1 = [\mathbf{f}_1] \;\Rightarrow\; V_2 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{u}_2]$
III. Projicera Projicerar $\mathbf{u}_2$ på $\mathbf{f}_1$ för att få den parallella sträckan.	$\mathbf{u}_{2\vert\vert\mathbf{f}_1} = (\mathbf{u}_2\vert\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 = \left(\mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{6}{10}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$
IV. Subtrahera Använder sambandet $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\vert\vert} + \mathbf{u}_{\perp}$ för att få det ortonormala komplementet.	$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\vert\vert} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\mathbf{e}\begin{pmatrix}10\\0\\5\\0\end{pmatrix} - \mathbf{e}\begin{pmatrix}9\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix}$
I. Normera	$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix}$
II. Fyll ut	$V_2 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{u}_2] \;\Rightarrow\; V_3 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{u}_3]$
III. Projicera	$\mathbf{u}_{3\vert\vert[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = (\mathbf{u}_3\vert\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3\vert\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 =$ $\left(\mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \left(\mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix} =$ $\frac{12}{10}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{4}{35}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}\mathbf{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{7}\mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\0\end{pmatrix}\right) =$ $= \frac{4}{5}\left(\mathbf{e}\begin{pmatrix}9/2\\3/2\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbf{e}\begin{pmatrix}1/7\\-3/7\\5/7\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{4}{5}\mathbf{e}\begin{pmatrix}65/14\\15/14\\10/14\\0\end{pmatrix} = \frac{4}{70}\mathbf{e}\begin{pmatrix}65\\15\\10\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{7}\mathbf{e}\begin{pmatrix}13\\3\\2\\0\end{pmatrix}$
IV. Subtrahera	$\mathbf{u}_{3\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3\vert\vert[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{7}\mathbf{e}\begin{pmatrix}13\\3\\2\\0\end{pmatrix} =$ $\frac{1}{7}\left(\mathbf{e}\begin{pmatrix}28\\0\\0\\7\end{pmatrix} - \mathbf{e}\begin{pmatrix}26\\6\\4\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\\7\end{pmatrix}$
I. Normera	$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{7}\mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\\7\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{105}}\mathbf{e}\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\\7\end{pmatrix}$

Obs! Kontrollera att vektorerna är ortonormala mot varandra (skalärprodukten ska vara noll).

2,2 – Minstakvadrat-metoden

Minstakvadrat-metoden är en lösningsmetod för ekvationer utan lösningar, med andra ord: Man tar fram den bästa möjliga lösningen (approximationen).

Definition: Minsta kvadrat lösningen till ekvationen $AX = Y$ ges av $\boldsymbol{A^t A X = A^t Y}$

Betydelse: Ger de värden där $|\mathbf{e}Y - \mathbf{e}AX|$ blir så litet som möjligt. *(Jämför: $AX = Y \Leftrightarrow AX - Y = 0$).*

Modellproblem

Minstakvadrat-metoden kan användas för att approximera en linje/funktion utifrån data, då metoden ger lösningarna som *stämmer bäst överens med kriterierna.*

Exempel: (Uppgift 6,4,5 i häftet) Ange den andragradskurva $y = ax^2 + bx + c$ som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till värdena i tabellen.

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{y}$	2	1	1	2	3

Lösning:

<table>
<tr><td>1. Uttryck y enligt funktionsmodellen.</td><td>
<table>
<tr><td>$\boldsymbol{x}$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{y}$</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{ax^2+bx+c}$</td><td>$\boldsymbol{4a-2b+c}$</td><td>$\boldsymbol{a-b+c}$</td><td>$\boldsymbol{c}$</td><td>$\boldsymbol{a+b+c}$</td><td>$\boldsymbol{4a+2b+c}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2. Ställ upp matrisekvation.</td><td>

$$\begin{pmatrix} 4a-2b+c \\ a-b+c \\ c \\ a+b+c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AX = Y}$$

</td></tr>
<tr><td>3. Lös med minstakvadrat-metoden</td><td>

$$\boldsymbol{A^tAX = A^tY}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^tA} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^tY} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^tAX = A^tY} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 23 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 70 & 0 & 21 \\ 70 & 0 & 35 & 63 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 70 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 35 & 38 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 70 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 70 & 76 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ 76 \end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>4. Svar:</td><td>

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{70}(25x^2 + 21x + 76)}$$

</td></tr>
</table>

Minsta avstånd-problem

Då minstakvadrat-metoden ger närmaste lösningen till en olöslig ekvation kan den användas för att ta fram den *minsta avståndet mellan två vektorer/plan/vektorrum som inte skär varandra.* Idén är att man ställer upp en ekvation om att de ska skära varandra, och genom minsta kvadratmetoden får man fram det minsta avståndet (bästa möjliga lösning).

Exempel: (Uppgift från tenta 2012-08-18, uppgift 4).

Låt $v = (3,2,1,4,-2)$ och låt **U** vara lösningsrummet till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Bestäm (minsta) avståndet mellan $\mathbf{v}$ och **U**, dvs. $\min_{\mathbf{u}\in \boldsymbol{U}}|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$

Teori: Idén är att ställa upp en ekvation som skulle innebära att $\mathbf{v}$ finns i lösningsrummet. Ekvationen blir olöslig ($\mathbf{v}$ finns ju inte i lösningsrummet) men genom att lösa problemet med minstakvadrat-metoden får man fram den bästa möjliga anpassningen, med andra ord $v_{||_U}$. Det minsta möjliga avståndet, $\min_{\mathbf{u}\in \boldsymbol{U}}|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$, är $\mathbf{v}$:s ortogonala komposant mot **U**: $\min_{\mathbf{u}\in \boldsymbol{U}}|\mathbf{v} - \mathbf{u}| = |\mathbf{v}_{\perp U}|$, vilket man kan ta fram genom sambandet $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||_U} + \mathbf{v}_{\perp U}$ (komposantuppdelning av vektorer).

Lösning:

1. Skriv om lösningsrummet till ett hölje av baser (parametrisera).	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \\ r \\ s \\ t \\ 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r + 3s - t - 3s \\ r \\ s \\ t \\ 3s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \mathbf{U} = \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$
2. Ställ upp ekvation enligt idén.	**Idé: Om v hade funnits i lösningsrummet hade det kunnat skrivas som en linjärkombination av baserna:** $\boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v}$ **Ekvationen saknar lösningar, men genom minstakvadrat-metoden får man bästa möjiga anpassning:** $\boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3} = \mathbf{v}_{\|U}$ $(= \mathbf{v}\text{ anpassat efter }\mathbf{U})$
3. Ställ upp ekvationen i matrisform.	$\boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda_3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{AX = Y}$
4. Lös ekvationen med minstakvadrat-metoden. ***Eftersom systemet är olösbart, vektorn v ligger ju inte i***	$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

lösningsrummet. ***Svaret kommer ge koefficienterna till en linjärkombination som beskriver $\mathbf{v}_{\|\|U}$.***	$\boldsymbol{A^tA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{A^tY} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{A^tAX = A^tY} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 10 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \\ -10 & 0 & 10 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 10 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 21 \end{array}\right) \Rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 30 & 0 & -12 & 48 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 30 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 21 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 21/6 \end{pmatrix}$
5. Ta fram $\mathbf{v}_{\|\|U}$	$\mathbf{v}_{\|\|U} = (\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 21/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 21/6 \\ 3 \\ -1/2 \\ 21/6 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/6 \\ 3 \\ -1/2 \\ 21/6 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\mathbf{v}_{\|\|U} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ -3 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}$
6. Ta fram $\mathbf{v}_{\perp U}$	$\mathbf{v}_{\perp U} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\|U} \Leftrightarrow$ $\mathbf{v}_{\perp U} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ -3 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 6 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ -3 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
7. Beräkna avståndet: $\min_{\mathbf{u}\in U}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_{\perp U}\|$	$\min_{\mathbf{u}\in \boldsymbol{U}}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_{\perp U}\| = \left\| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
8. Svar:	$\min_{\mathbf{u}\in \boldsymbol{U}}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = 2$

3 – Linjära avbildningar

3,1 – Linjära avbildningar

Syfte

En linjär avbildning innebär att man förändrar något efter ett givet villkor. Linjärt innebär att allt är proportionerligt. Linjära avbildningar kan t.ex. vara

- Förstorning/Förminskning
- Spegling
- Vridning

Linjär avbildning kan t.ex. och vara att man tittar på ett fåtal riktningar av en vektor, t.ex. att man endast vill se hur en rät linje rör sig i x-led.

Matriser

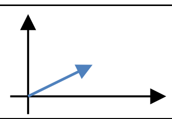
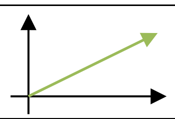
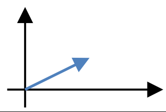
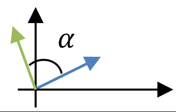
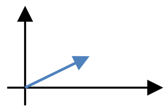
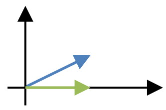
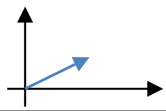
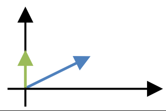
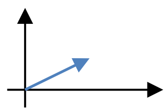
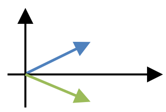
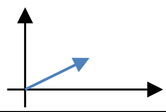
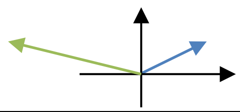
Linjära avbildningar brukar beskrivas som vektorn multiplicerat med en *avbildningsmatris.*

$$F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

Avbildningsmatrisen anger hur vektorn kommer att avbildas. Kolonnerna i matrisen står för vad avbildningen gör med respektive basvektor.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ F(e_1) & F(e_2) & F(e_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Exempel: $F: R^2 \to R^2$

Avbildning	**Matris**	**Vektorn u** *(blå)*	**Avbildade vektorn, $\boldsymbol{F}(\mathbf{u})$** *(grön)*
Identitetsavbildning (avbildar en identisk vektor)	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	-	-
Skalning: Två gånger i alla riktningar.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$		
Rotation med vinkeln α	$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$		
Projektion på x-axeln	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$		 $N(F)=\left[\mathbf{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ $V(F)=\left[\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$
Projektion på y-axeln	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		
Spegling i x-led: *Alla y-koordinater multipliceras med* -1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		
Spegling i y-led: *Alla x-koordinater multipliceras med* -1	$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		

Räknelagar linjär avbildningar

Definition	Förklaring
$F(\mathbf{u}+\mathbf{v})=F(\mathbf{u})+F(\mathbf{v})$	Den linjära avbildningen av summan av två vektorer är samma som summan av den linjära avbildningen för vektorerna var för sig. Användbart knep om man behöver dela upp en vektor och ta fram avbildningen i två steg.
$F(\lambda\mathbf{u})=\lambda F(\mathbf{u})$	Linjära avbildningen för en konstant gånger en vektor är samma som konstanten gånger avbildningen för vektorn. Om man tänker geometriskt ter sig lagen ganska logisk.

3,2 – Basbyten

Givet att $T=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix}$ **ges sambanden**

- $\mathbf{f}=\mathbf{e}\boldsymbol{T}$
- $\boldsymbol{X}_e=\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}_f$

Obs! För att ställa upp transformationsmatrisen behövs att basen $\mathbf{f}$ uttrycks i basen $\mathbf{e}$.

Exempel: $\mathbf{f}_1=\mathbf{e}\binom{3}{1}$, $\mathbf{f}_2=\mathbf{e}\binom{-1}{2}$. Ange vektorn $\mathbf{v}=\mathbf{e}\binom{5}{4}$ i basen $\mathbf{f}$.

1. Ta fram *transformationsmatrisen*: $\Rightarrow\quad T=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
2. Använd bas-sambandet: $\mathbf{f}=\mathbf{e}T \;\Leftrightarrow\; T^{-1}=\mathbf{e}T\,T^{-1}\Leftrightarrow \boxed{=\mathbf{f}T^{-1}}$
3. Ta fram inversen till transformationsmatrisen: $T^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$
4. Sätt in uttrycket: $\mathbf{v}=\boxed{\mathbf{e}}\binom{5}{4}=\boxed{\mathbf{f}T^{-1}}\binom{5}{4}=\mathbf{f}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\binom{5}{4}=\mathbf{f}\frac{1}{7}\binom{10+4}{-5+12}=\mathbf{f}\frac{1}{7}\binom{14}{-7}=\mathbf{f}\binom{2}{-1}$

Svar: $\mathbf{v}=\mathbf{f}\binom{2}{-1}$

3,3 – Värderum och nollrum

Definition	**Förklaring**
$F: U \to V$	
$N(F) = \{\mathbf{u} \in U: F(\mathbf{u}) = 0\}$	Alla vektorer som blir noll efter att de avbildas.
$V(F) = \{F(\mathbf{u}) \in V: \mathbf{u} \in U\}$	Alla vektorer som får ett värde efter att de avbildas.
$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim U$	Dimensionen för nollrummet plus dimensionen för värderummet motsvarar dimensionen för vektorrummet (där vi startade).

Med andra ord:

- Nollrummet består av vektorer som uppfyller ekvationen $AX = 0$
- Värderummet är alla vektorer som uppfyller $AY = X$

Exempel: (Uppgift från boken). Bestäm nollrum och värderum för den linjära avbildningen $F: R^4 \to R^4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

<table>
<tr><th>Nollrum bestäms: $AX = 0$</th><th>Värderum bestäms: $AY = X$</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$</td><td>$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & x_1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & x_2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & x_3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & x_4 \end{array}\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

-2 1 -3

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & x_3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 0 & -14 & -14 & -14 & 0 & x_2 - 3x_1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & x_3 + x_1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 0 & x_4 - 2x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 & 2x_1 - x_4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & x_3 + x_1 \\ 0 & 14 & 14 & 14 & 0 & 3x_1 - x_2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 & 2x_1 - x_4 \\ 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 5x_3 + 5x_1 \\ 0 & 70 & 70 & 70 & 0 & 15x_1 - 5x_2 \end{array}\right) \sim$$

-14 -4

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 & 2x_1 - x_4 \\ 0 & 20 & 20 & 20 & 0 & 5x_3 + 5x_1 \\ 0 & 70 & 70 & 70 & 0 & 15x_1 - 5x_2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 & 2x_1 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1 + 5x_3 + 4x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13x_1 - 5x_2 + 14x_4 \end{array}\right)$$

</td></tr>
<tr><th>Nollrum</th><th>Värderum</th></tr>
<tr><td>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ s \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -s - 2t \\ -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

</td><td>

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 0 & 2x_1 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1 + 5x_3 + 4x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13x_1 - 5x_2 + 14x_4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Ekvationer som ska gälla för att vektorn ska anta ett värde efter avbildningen.

</td></tr>
<tr><td>

Svar: $N(F) = \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $\dim N(F) = 2$

</td><td>

Svar: $V(F) = \left\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^4: \begin{matrix} -3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ -13x_1 - 5x_2 + 14x_4 = 0 \end{matrix}\right\}$

$\dim V(F) = 2$

</td></tr>
</table>

Matrisframställning

Ibland när man ställer upp matrisen för en linjäravbildning blir man lite lurad av skrivsättet.

Exempel: (Uppgift från tenta 2012-08-18, uppgift 5).

Den linjära avbildning $F: R^4 \to R^4$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4, x_2 - x_4, x_1 - x_3 - x_4, 2x_2 + 3x_3 + x_4)$$

Bestäm F:s matris i standardbasen och bestäm bas och dimension för noll- respektive värderum.

Lösning: För att ställa upp matrisen tittar vi och jämför med definition för en linjär avbildning:

$$F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \Rightarrow \quad F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 3x_2 & 4x_3 & x_4 \\ & x_2 & & -x_4 \\ x_1 & & -x_3 & -x_4 \\ & 2x_2 & 3x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Nollrummet erhålls av lösningarna till ekvationen $AX = 0$. Värderummet består höljet som spänner upp matrisen.

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$, vilket då är en bas för nollrummet.

Värderummet består av matrisens hölje. Från lösningen ser man att det finns ett löjligt element. Beroende ekvationen ger: $0\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_4 = -\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, dvs. u_4 är ett löjligt element.

Värderummet blir då höljet av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$: $V(F) = \left[\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{e}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

4 – Spektralteori

4,1 – Egenvärde och egenvektorer

Definition	
$\mathbf{u}$ är en egenvektor om $F(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, där λ kallas egenvektorns *egenvärde*.	En egenvektor blir efter en avbildning sig själv gånger en konstant; med andra ord förlängd eller förkortad.
Sekularpolynomet: $\det(A - \lambda I)$ Sekularekvationen: $\det(A - \lambda I) = 0$	Sekularekvationen används för att beräkna egenvärdena för en matris.

Följdsatser:

- Har en matris A till funktionen F lika många olika egenvärden som vektorrummet har dimension blir:
    - Egenvektorerna linjärt oberoende rätt antal, alltså en bas.
    - Funktionen F diagonaliserbar.
- Om matrisen A till funktione F är symmetrisk är egenvektorerna till egenvärdena *ortogonala*.
    - F är symmetrisk $\Leftrightarrow$ Det finns en ON-bas bestående av egenvektorer till F

Exempel: Bestäm egenvektorer och egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Ställ upp och lös sekularekvationen.	$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $(2-\lambda)(2-\lambda) - (-1 \times -1) = 0 \Leftrightarrow$ $4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$
2. Lös ekvationerna $(A - \lambda I)X = 0$	
a. $\boldsymbol{\lambda = 1}$ $(A - 1I)X = 0$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 2-\mathbf{1} & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $X = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **Egenvektor till egenvärdet $\boldsymbol{\lambda = 1}$ är $\mathbf{u_1} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**
b. $\boldsymbol{\lambda = 3}$ $(A - 3I)X = 0$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 2-\mathbf{3} & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mathbf{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $X = \begin{matrix} -t \\ t \end{matrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **Egenvektor till egenvärdet $\boldsymbol{\lambda = 3}$ är $\mathbf{u_2} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$**
3. Kontroll. Per definition ska *egenvektorn* gånger *matrisen* bli sig själv gånger en konstant.	Kontroll, $\lambda = 1$. $F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Kontroll, $\lambda = 3$ $F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svar: Egenvektorerna är $\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Anmärkning: Då matrisen A är symmetrisk är egenvektorerna är ortogonala.

4,2 – Matrispotenser

Matrispotenser är i regel bökiga att beräkna. De enda matrispotenser som är rimliga att beräkna är de *diagonala*.

$$Om\ A = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} så\ blir\ A^n = \begin{pmatrix} a^n & \\ & b^n \end{pmatrix}$$

För att kunna beräkna matrispotenser är målet att skriva om matrisen till en diagonalmatris. Detta görs i regel med hjälp av *egenvärden*. Följande samband gäller:

$$A_\mathbf{e} = TA_\mathbf{f}T^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad {A_\mathbf{e}}^n = T{A_\mathbf{f}}^nT^{-1}$$

Exempel: (Exempel 8.2.10 från boken).

$A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$. Bestäm A^{47}.

Teori: Genom att beräkna egenvärden och egenvektorer kan man ta fram en diagonal matris i basen **f**. Transformationsmatrisen T ställs upp med baserna. Obs! Alla matriser är inte diagonaliserbara, då blir det problem…

Lösning:

1. Beräkna egenvärden för matrisen.	$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -14-\lambda & 12 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $(-14-\lambda)(17-\lambda) - (-20 \times 12) = -238 - 3\lambda + \lambda^2 + 240 = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$
2. Beräkna egenvektorer:	
a. $\boldsymbol{\lambda = 1}$ $(A - 1I)X = 0$	$\left(\begin{array}{cc\|c} -14-\mathbf{1} & 12 & 0 \\ -20 & 17-\mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -15 & 12 & 0 \\ -20 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -5 & 4 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $X = \begin{matrix} 4t/5 \\ t \end{matrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ **Egenvektor till egenvärdet $\boldsymbol{\lambda = 1}$ är $\mathbf{f_1} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$**
b. $\boldsymbol{\lambda = 2}$ $(A - 2I)X = 0$	$\left(\begin{array}{cc\|c} -14-\mathbf{2} & 12 & 0 \\ -20 & 17-\mathbf{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -16 & 12 & 0 \\ -20 & 15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -4 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $X = \begin{matrix} 3t/4 \\ t \end{matrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **Egenvektor till egenvärdet $\boldsymbol{\lambda = 2}$ är $\mathbf{f_2} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$**
3. Ställ upp transformationsmatrisen och dess invers.	$T = (\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2) = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \frac{1}{16-15}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$
4. Ställ upp matris i den nya basen.	$A_\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. Utför beräkningen:	${A_\mathbf{e}}^n = T{A_\mathbf{f}}^nT^{-1} \Rightarrow A^{47} = T{A_\mathbf{f}}^{47}T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{47} & 0 \\ 0 & 2^{47} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ${A_\mathbf{e}}^{47} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{47} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ ${A_\mathbf{e}}^{47} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 \cdot 2^{47} & 4 \cdot 2^{47} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 20 \cdot 2^{47} & -12 + 12 \cdot 2^{47} \\ 20 - 20 \cdot 2^{47} & -15 + 16 \cdot 2^{47} \end{pmatrix}$
6. Svar:	${A_\mathbf{e}}^{47} = \begin{pmatrix} 16 - 20 \cdot 2^{47} & -12 + 12 \cdot 2^{47} \\ 20 - 20 \cdot 2^{47} & -15 + 16 \cdot 2^{47} \end{pmatrix}$

5 – Tillämpningar av spektralteorin

5,1 – Andragradsformer

	Med medelpunkt i origo	Med medelpunkt (x_0, y_0)
Cirkel	$x^2 + y^2 = c$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c$
Ellips	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$
Hyperbel	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \pm 1$	$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = \pm 1$

Teckenkaraktär

När man ska avgöra hur andragradsformer beter sig är det smidigast att undersöka egenvärdena.

Teckenkaraktär	Signatur	Egenvärden
Positiv definit	(1, …, 1)	Positiva
Negativ definit	(-1, …, -1)	Negativa
Positiv semidefinit	1:or, minst en 0:a	Något positivt, något =0.
Negativ semidefinit	-1:or, minst en 0:a	Något negativt, något =0.
Indefinit	Minst en 1:a, minst en -1:a.	Något positivt, något negativt.

När man arbetar med andragradsformer är det fantastiskt smidigt att göra ett basbyte. Syftet är att lägga koordinatsystemet enligt andragradsformens symmetriaxlar. Detta görs genom att beräkna matrisens egenvärden.

$$Symmetriaxlar = Egenriktningar$$

När man har skvit om andragradsformen till bas av egenvektorer ges koefficienterna av egenvärdena. Då koefficienterna anger hur kurvan beter sig uppstår följande samband:

$$\lambda_{min}|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{max}|\mathbf{u}|^2$$

Likheten gäller om $\mathbf{u}$ är egenvektorn till tillhörande egenvärde.

- **Minsta värdet** ges av det ***minsta egenvärdet*** och erhålls då $\mathbf{u}$ är ***egenvektorn för motsvarande egenvärde.***
- **Maximala värdet** ges av det ***största egenvärdet*** och erhålls då $\mathbf{u}$ är ***egenvektorn för motsvarande egenvärde.***

Obs! För att använda knepet krävs det att man vet ett värde på $|\mathbf{u}|$.

Metod för att beräkna största och minsta värde för en andragradsform (givet ett värde på $|\mathbf{u}|$).

1. Ställ upp i matrisform
2. Beräkna egenvärden
3. Beräkna egenvektor för det minsta egenvärdet.
4. Beräkna egenvektor för det största egenvärdet.
5. $Minsta\ värde\ = minsta\ egenvärdet \times motsvarande\ egenvektor.$
6. $Största\ värde = största\ egenvärdet \times motsvarande\ egenvektor.$

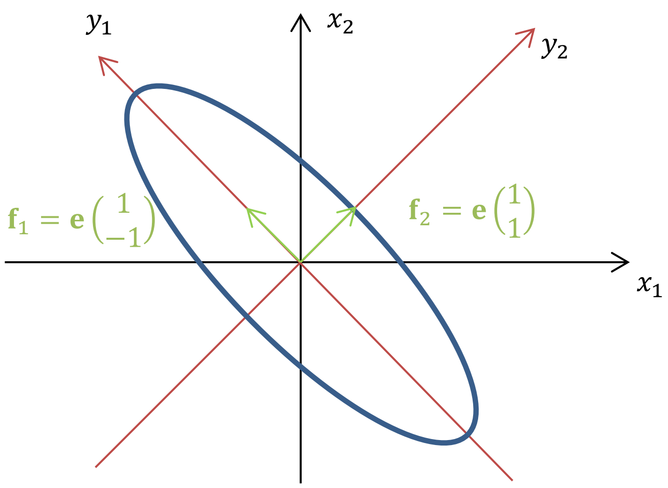
Exempel: (Uppgift från tenta 2011-12-20, uppgift 5). Vilken typ av kurva i R^2 definieras av uttrycket

$$Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 = 9$$

Rita kurvan [...] i förhållande till x_1x_2-systemet. Ange också koordinaterna, i x_1x_2-systemet för de punkter som ligger närmast origa.

Teori: För att kunna se typen av kurva vill vi se kurvan i ***förhållande till dess symmetriaxlar***. För att göra detta ställer vi upp uttrycket i matrisform och beräknar matrisens egenvärde och egenvektorer*(just eftersom symmetriaxlar = egenriktningar).*

Lösning:

1. Skriver upp uttrycket i matrisform.	$Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1\ x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 8/2 \\ 8/2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
2. Beräkna egenvärden för matrisen.	$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $(5-\lambda)(5-\lambda) - 16 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 9 \end{cases}$
3. Beräkna egenvektorer.	
a. $\lambda = 1$	$(A - I)X = 0 \ \Rightarrow \left(\begin{array}{cc\|c} 5-\mathbf{1} & 4 & 0 \\ 4 & 5-\mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $X = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
b. $\lambda = 9$	$(A - 9I)X = 0 \ \Rightarrow \left(\begin{array}{cc\|c} 5-\mathbf{9} & 4 & 0 \\ 4 & 5-\mathbf{9} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $X = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. Definiera ON-bas.	$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. Skriv om uttrycket.	Då vi har vridit koordinatsystemet efter uttryckets symmetriaxlar innebär det att vi inte längre behöver ta hänsyn till förskjutningen (tidigare mittentermen, $8x_1x_2$). Egenvärdena till matrisen motsvarar koefficienterna till kvadrattermerna. Vi kallar det nya koordinatsystemet för $y_1 - y_2$. $Q(y_1, y_2) = 1y_1^2 + 9y_2^2 = 9$
6. Rita kurvan.	
7. Ta fram minsta avstånd till origo.	Enligt figuren ser man att minsta avstånden mellan ellipsen och origo finns då ellipsen skär y_2-axeln, alltså då $y_1 = 0$. $Q(y_1, y_2) = 1y_1^2 + 9y_2^2 = 9, y_2 = 0 \ \Rightarrow \ \ 9y_2^2 = 9 \Leftrightarrow y_2 = \pm 1\mathbf{f}_1$
8. Svara i x_1x_2-systemet (basen **e**).	$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5,2 – Differentialekvationer

Differentialekvation är ett samband mellan en funktion och dess derivata/derivator.

Metoden är att

- Skriva om ekvationen till matrisform
- Beräkna egenvärden/egenvektorer
- Skriva upp lösnigen på formen $X(t) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ (Förutsatt att det var två ekvationer)

Nedan visas två exempel: Först ett där hela härledningen visas och därefter ett där endast snabbregeln visas.

Exempel: (Uppgift 9,4,1 från boken).

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1'(t) = 4x_1(t) - 7x_2(t)} \\ \boldsymbol{x_2'(t) = 2x_1(t) - 5x_2(t)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{x_1(0) = 8} \\ \boldsymbol{x_2(0) = 3} \end{cases}$$

Lösning (fullständig):

<table>
<tr>
<td>1. Skriv om till matrisform.</td>
<td colspan="2">$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = AX(t)$
Problemet är att vi har två funktioner beroende av två variabler vardera, alltså för många variabler för att kunna lösa. Lösningen innebär att skriva om det till en bas av egenvektorer, varav man bortser från ”förskjutningar”.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Beräkna egenvärden.</td>
<td colspan="2">$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$
$(4-\lambda)(-5-\lambda) - (2 \times -7) = \lambda^2 + \lambda - 20 + 14 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Beräkna egenvektorer</td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td>a. $\boldsymbol{\lambda = -3}$
$(A + 3I)X = 0$</td>
<td colspan="2">$\left(\begin{array}{cc|c} 4+\mathbf{3} & -7 & 0 \\ 2 & -5+\mathbf{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -7 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow$
$X = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1$</td>
</tr>
<tr>
<td>b. $\boldsymbol{\lambda = 2}$
$(A - 2I)X = 0$</td>
<td colspan="2">$\left(\begin{array}{cc|c} 4-\mathbf{2} & -7 & 0 \\ 2 & -5-\mathbf{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -7 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow$
$X = \begin{pmatrix} 7t/2 \\ t \end{pmatrix} = t\mathbf{e}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2$

Anmärkning: Två skilda egenvektorer till en matris med dimension två innebär att matrisen är diagonliserbar.</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Ställ upp T och T^{-1}</td>
<td colspan="2">$\mathbf{f} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; T^{-1} = \frac{1}{2-7}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Skriv om till bas av egenvektorer.</td>
<td>$X'(t) = A_{\mathbf{e}}X(t)$
$Y'(t) = A_{\mathbf{f}}Y(t) \;\Leftrightarrow\; Y'(t) = T^{-1}A_{\mathbf{e}}TY(t)$</td>
<td>$A_{\mathbf{e}} = TA_{\mathbf{f}}T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1}A_{\mathbf{e}}T = A_{\mathbf{f}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Sätt in matriserna och multiplicera ihop.</td>
<td>$Y'(t) = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}Y(t) \Leftrightarrow$
$Y'(t) = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}Y(t) \;\Leftrightarrow$
$Y'(t) = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}Y(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}Y(t) \;\Leftrightarrow$
$Y'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{matrix} -3y_1(t) \\ 2y_2(t) \end{matrix}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7. Koppla isär ekvationerna.</td>
<td>$Y'(t) = \begin{matrix} y_1'(t) = -3y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} y_1(t) = C_1e^{-3t} \\ y_2(t) = C_2e^{2t} \end{matrix}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>8. Använd begynnelsevillkor: Byt först till rätt bas och beräkna därefter konstanterna C</td>
<td>$Y(0) = T^{-1}X(0) \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$Y(\mathbf{0}) = \begin{matrix} C_1e^{-3\cdot\mathbf{0}} = 1 \\ C_2e^{2\cdot\mathbf{0}} = 1 \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} y_1(t) = e^{-3t} \\ y_2(t) = e^{2t} \end{matrix}$</td>
<td>Obs! Från uppgiften:
$\begin{cases} \boldsymbol{x_1(0) = 8} \\ \boldsymbol{x_2(0) = 3} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>9. Byt tillbaka till rätt bas.</td>
<td>$\mathbf{e}X(t) = \mathbf{f}Y(t) = \mathbf{f}\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\mathbf{e}X(t) = \mathbf{e}\begin{pmatrix} e^{-3t} + 7e^{2t} \\ e^{-3t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$</td>
<td>$\mathbf{f} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se punkt 4.</td>
</tr>
<tr>
<td>10. Skriv svar.</td>
<td>$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - 7x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-3t} + 7e^{2t} \\ x_2(t) = e^{-3t} + 2e^{2t} \end{cases}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Om man tittar tillbaka ser man att lösningen har formen:

$$X(t) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} f_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} f_2$$

Där $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är egenvektorer med egenvärdena $\boldsymbol{\lambda_1}$ och $\boldsymbol{\lambda_2}$**. Detta gäller alltid.**

Exempel: (Uppgift 9,4,3 a) från häftet).

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Lösning (kort variant):

1. Ställer upp i matrisform.	$X'(t) = AX(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
2. Beräkna egenvärden.	$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$
3. Beräkna egenvektorer.	
a. $\boldsymbol{\lambda = -1}$	$\left(\begin{matrix} 1+\mathbf{1} & 4 \\ 2 & 3+\mathbf{1} \end{matrix}\middle\vert\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{matrix}\middle\vert\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle\vert\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow X = e\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1$
b. $\boldsymbol{\lambda = 5}$	$\left(\begin{matrix} 1-\mathbf{5} & 4 \\ 2 & 3-\mathbf{5} \end{matrix}\middle\vert\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{matrix}\middle\vert\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle\vert\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow X = e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2$
4. Skriv upp matriser.	$X(t) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{-\mathbf{1}t} \\ C_2 e^{\mathbf{5}t} \end{pmatrix}$
5. Svar:	$X(t) = \begin{matrix} 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ -C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{matrix}$

6 – Sammanfattning

Formler och samband som är skönt att kunna utantill…

Formel/Samband	**Kommentar**
Blandat	
$\mathrm{f} = \mathrm{e}T$	Basbytesformeln.
• $\det T = 1 \Leftrightarrow Vridning$ • $\det T = -1 \Leftrightarrow Spegling/vridning$	Kontrollera vid framtagning av ny ON-bas.
$X_e = TX_f$	Koordinatsambandet.
$A_\mathrm{e} = TA_\mathrm{f}T^{-1}$	Matrissambandet.
$\mathbf{v}_{\|\|\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$	
$\mathbf{v}_{\|\|U} = \mathbf{v}_{\|\|[\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}]} = (\mathbf{v}\|\mathbf{f_1})\mathbf{f_1} + (\mathbf{v}\|\mathbf{f_2})\mathbf{f_2}$	Anmärkning: Slipper dela på absolutbeloppet i kvadrat då $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är normerade.
$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\|U} + \mathbf{v}_{\perp U} = \mathbf{v}_{\|\|U} + \mathbf{v}_{\|\|U^\perp}$	Användbart samband.
Lösning till differentialekvationen $X'(t) = AX(t)$: $X(t) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix} C_1e^{\lambda_1 t} \\ C_2e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} = C_1e^{\lambda_1 t}f_1 + C_2e^{\lambda_2 t}f_2$	
$AX = Y \quad \Rightarrow \quad A^tAX = A^tY$	Minstakvadrat-metoden.
${A_\mathbf{e}}^n = T{A_\mathbf{f}}^nT^{-1}$	Matrispotenser – Härleds från matrissambandet. Obs! Endast vettig om A är diagonaliserbar.
$\min_{\mathbf{u}\in U}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_{\perp U}\|$	Minsta avstånd mellan två vektorer som ej ligger i samma vektorrum motsvarar det ortogonala komplementet mellan dessa.
Matriser	
$A + B = B + A$	Addera/subtrahera position för position.
$AB \neq BA$	Vid ekvationslösning gäller det att flytta om från ”rätt håll”.
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$	Determinanten är nollskild, $\det A \neq 0$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	Matriserna byter position.
$(AB)^T = B^TA^T$	Matriserna byter position
Determinanter	
För ekvationen $AX = Y$ gäller att • Om $\det A \neq 0$ har ekvationen en entydig lösning. • Om $\det A = 0$ gäller antingen att o Systemet saknar lösning o Systemet har oändligt antal lösningar.	Med resonemanget kan man även sluta sig till att ekvationssystemet $AX = 0$ har oändligt antal lösningar om $\det A = 0$.
Linjära avbildningar	
$F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ $F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$ $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$	Räknelagar för linjära avbildningar. Kan vara användbara vid svåra uppgifter.
$A\ symmetrisk \Leftrightarrow ON - bas\ av\ egenvektorer$	
Spegling i ett plan: $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\|\|\mathbf{n}}$ **Obs!** Matrisen kommer vara diagonal i en bas av egenvektorer (tänk: en egenvektor motsvarar normalen, de två andra spänner upp planet.)