Rekursiva/differensekvationer

- $\underbrace{a_{n+4} + 3a_{n+2} - a_n}_{VL} = \underbrace{5n}_{HL}, n \geq 0. \quad \underbrace{a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 2}_{\text{begynnelsevärden (BV)}}.$
- Alltid med på tentan, standardiserad lösningsgång.

Lösningsmetod

1) Dela upp a_n i homogen lösning $a_n^{(h)}$ och partikulärlösning $a_n^{(p)}$
2) Bestäm homogen lösning $a_n^{(h)}$ via karakteristisk ekvation (KE)
3) Bestäm partikuläransats beroende på HL och KE
4) Bestäm partikulärlösning $a_n^{(p)}$
5) Lös ut homogena koefficienter med hjälp av begynnelsevärden (BV)
6) Slå ihop $a_n^{(h)}$ och $a_n^{(p)}$ för att få svaret!

Exempel (2015-10-22 uppgift 3)

Lös ekvationen $\underbrace{a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n}_{VL} = \underbrace{3n}_{HL}, n \geq 0. \quad \underbrace{a_0 = a_1 = a_2 = 1}_{BV}$

1) Dela upp i $a_n^{(h)}$ och $a_n^{(p)}$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

2) Bestäm $a_n^{(h)}$

- Bestäm KE först. VL: $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$ ty homogena ekvationen

  resulterar i KE: $r^3 - 6r^2 + 11r^1 - 6r^0 = 0$
  - Börja med lägsta numreringen, a_n i detta fall. Motsvarar "0" i potens.
  - Varje steg uppåt i numrering motsvarar ett steg i potens.
  - (Variabeln r används enbart av tradition)
  - Koefficienterna förblir samma

- $\boxed{\text{Exempel}}$: $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 5$ för
  KE: $r^3 - 3r^2 + 3r^1 - r^0 = 0$

- Lös KE

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

Notera rötterna och deras $\underbrace{\text{multiplicitet}}_{\text{hur många gånger de förekommer}}$!

• **Lös KE** (forts.)

Vi får: $\begin{cases} r_1 = 1, & m_1 = 1 \\ r_2 = 2, & m_2 = 1 \\ r_3 = 3, & m_3 = 1 \end{cases}$

rötter — multiplicitet

Exempel: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (r-1)^3$
$\Rightarrow r_1 = 1,\ m_1 = 3$

• **Ta fram $a_n^{(h)}$**

Varje par av rot & multiplicitet bidrar till en term i $a_n^{(h)}$

$r_1 = 1,\ m_1 = 1 \Rightarrow \underbrace{A}_{\text{polynom av grad } m-1} \cdot 1^n$ ← r

$r_2 = 2,\ m_2 = 1 \Rightarrow B \cdot 2^n$

$r_3 = 3,\ m_3 = 1 \Rightarrow C \cdot 3^n$

Exempel: $r_1 = 1,\ m_1 = 3$
$\Rightarrow (An^2 + Bn + C) \cdot 1^n$
$r_2 = 2,\ m_1 = 2$
$\Rightarrow (Dn + E) \cdot 2^n$

$a_n^{(h)}$ = summan av termerna
$= A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n$
$= A + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n$

(A, B, C är godtyckliga konstanter. Vi vet ännu inte deras värden. Men det löses i steg 5)

3) **Bestäm partikuläransats**

• Kolla på HL. HL är alltid på formen polynom • exponentialfunktion.

HL: $\underbrace{3n}_{\text{polynom}}$ $\underbrace{\quad}_{\text{exponent??}}$ Vi ser att $3n = 3n \cdot 1^n$ — Lätt att missa!

Alltså: HL = $3n \cdot 1^n$
polynom: $3n$
exponent: 1

• **Fall 1**: exponent är rot till KE, med multiplicitet m
⇒ Ansatsen blir $a_n^{(p)} = \underbrace{\text{polynom}}_{\text{av samma grad som polynomet i HL}} \cdot \text{exponent}^n \cdot n^m$

• **Fall 2**: exponent är inte rot till KE
⇒ Ansatsen blir $a_n^{(p)} = \text{polynom} \cdot \text{exponent}^n$

(I vårt exempel, fall 1 ty exponent = 1 är rot till KE med multiplicitet m=1)

⇒ ansatsen $a_n^{(p)} = \text{polynom} \cdot \text{exponent} \cdot n^m$
$= (Dn + E) \cdot 1^n \cdot n^1$
$= (Dn + E)n$
$= Dn^2 + En$

Exempel
HL = $(5n+1) \cdot 2^n$
⇒ polynom = $5n+1$
exponent = 2
⇒ $a_n^{(p)} = (An + B) \cdot 2^n$

4) Bestäm $a_n^{(p)}$

Vi vet: $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$

Vi har: $a_n^{(p)} = Dn^2 + En$. Vill veta koefficienterna D och E.

Idé: Titta på VL, stoppa in $a_n^{(p)}$. Detta ska bli HL!

$$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

VL: $D(n+3)^2 + E(n+3) - 6[D(n+2)^2 + E(n+2)] + 11[D(n+1)^2 + E(n+1)] - 6[Dn^2 + En]$

HL: $3n$

- Identifiera koefficienter

$$\left.\begin{array}{l} n^2: \ D - 6D + 11D - 6D = 0 \\ n^1: \ 6D - 24D + 22D + E - 6E + 11E - 6E = 3 \\ n^0: \ 9D - 24D + 11D + 3E - 12E + 11E = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4D = 3 \\ 2E = 4D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{3}{4} \\ E = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Med $\begin{cases} D = \frac{3}{4} \\ E = \frac{3}{2} \end{cases}$ får vi $a_n^{(p)} = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n$

5) Lös ut koefficienter till $a_n^{(h)}$

Vi vet: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$= A + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n$

- Använd givna begynnelsevärden (BV)

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$ Vad betyder detta egentligen? Jo, a_n för $n=0$ blir 1 p.s.s. för $n=1$ osv. $\Rightarrow \begin{cases} A + B \cdot 2^0 + C \cdot 3^0 + \frac{3}{4} \cdot 0^2 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 1 \\ A + B \cdot 2^1 + C \cdot 3^1 + \frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 \\ A + B \cdot 2^2 + C \cdot 3^2 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ A + 2B + 3C + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = 1 \\ A + 4B + 9C + 3 + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ A + 2B + 3C + \frac{9}{4} = 1 \\ A + 4B + 9C + 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 29/8 \\ B = -3 \\ C = 3/8 \end{cases}$$

- Med dessa koefficienter får vi: $a_n^{(h)} = -\frac{29}{8} - 3 \cdot 2^n + \frac{3}{8} \cdot 3^n$

6) Slå ihop $a_n^{(h)}$ och $a_n^{(p)}$

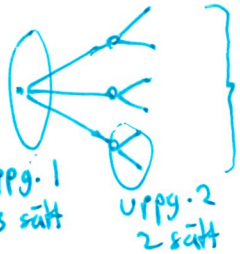
Svar: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$$= \underbrace{\frac{29}{8} - 3 \cdot 2^n + \frac{3}{8} \cdot 3^n}_{a_n^{(h)}} + \underbrace{\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n}_{a_n^{(p)}}, \ \underbrace{n \geq 0}_{\text{villkor från ursprungliga frågan}}$$

Kombinatorik

- Räkna antal saker, sätt
- Minst en fråga på varje tenta
- Ett antal olika principer och metoder

Exempel



$3 \times 2 = 6$ möjligheter

Additionsprincipen

- Utför endast en av k st uppgifter
- Uppgift 1 kan utföras på n_1 sätt
  Uppgift 2 kan utföras på n_2 sätt
  ⋮
  Uppgift k kan utföras på n_k sätt
  } endast en av dessa!
- Totalt $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ valmöjligheter

Exempel (eget)

Jag ska ut på en fredag. På Flamman finns 30 vänner, på Kårallen 20 st och KK 10 st. Hur många vänner kan jag träffa ikväll?

Lösning: Additionsprincipen ger:

$\Rightarrow 30 + 20 + 10 = 60$ vänner

Multiplikationsprincipen

- Utför k st uppgifter i tur och ordning
- Uppgift 1 kan göras på n_1 sätt
  Uppgift 2 kan göras på n_2 sätt
  ⋮
  Uppgift k kan göras på n_k sätt
  } alla dessa!
- Totalt $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ valmöjligheter

Exempel (4.1 i boken)

Volvo tillverkar 8 bilmodeller. Varje modell har 12 färger, 5 motortyper, 2 växellådor. Hur många olika Volvo-bilar kan tillverkas?

Lösning: Först bilmodell, sen färg, sen ...

$\Rightarrow$ "tur och ordning" $\Rightarrow$ multiplikationsprincipen

8 modeller $\times$ 12 färger $\times$ 5 motor $\times$ 2 växel $= 960$

Kombinationer

- n saker
- Välj ut k st
- ordning spelar ingen roll
- Totalt antal: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$

Permutationer

- n saker
- Välj ut k st
- Ordningen spelar roll
- Totalt antal: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Exempel (2016-08-18 uppgift 3) 8 personer ska arbeta på en fest. Det finns 4 uppgifter. Varje uppgift måste göras av en person. Hur många sätt finns det att fördela arbetet mellan sig?

OBS! Alltid bra att rita ut problemet. Tänk visuellt $\Rightarrow$ hjälper!

Lösning: Tänk 4 uppgifter $\approx$ 4 lådor

I första lådan kan vi välja vem som helst av de 8 personerna	I andra lådan kan vi välja alla utom den första personen = 7 pers	I tredje lådan — " — 6 pers	Låda 4 — " — 5 pers

multiplikationsprincipen (ty först låda 1, sen låda 2 ... $\Rightarrow$ "tur och ordning")

ger då $8 \times 7 \times 6 \times 5$ sätt totalt

Exempel (2015-08-20 uppgift 3) Lådan med 9 vita och 6 svarta bollar. Väljer 5 st.

a) På hur många sätt kan man välja 3 vita och 2 svarta?

b) På hur många sätt kan man välja högst 2 st vita?

Lösning

a) Välja 3 vita ur 9 vita totalt: $\binom{9}{3}$

Välja 2 svarta ur 6 svarta totalt: $\binom{6}{2}$

"Först vita, sen svarta" (eller vice versa) $\Rightarrow$ "tur och ordning" $\Rightarrow$ multiplikationsprincipen

Svar: $\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} = \frac{9!}{3!(9-3)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{9!}{3!2!4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot2} = \underbrace{9\cdot7\cdot5\cdot4}_{=1260}$

b) "Välja högst 2 vita" = "Välja 0 vita av 5" (och därmed) "5 svarta av 6"
+ "Välja 1 vita av 5" (och därmed) "4 svarta av 6"
+ "Välja 2 vita av 5" (och därmed) "3 svarta av 6"

$= \binom{5}{0}\binom{6}{5} + \binom{5}{1}\binom{6}{4} + \binom{5}{2}\binom{6}{3}$ (multiplikationsprincip pga "tur och ordning")

Binära följder och funktioner

- Följd av symboler, given längd. Ex: 1 1 0 0 1 0 1 — binär följd av längd 7
  - endast 0/1 — antal siffror
- "Hur många ... med villkoret att ..."
- Tillämpning av kombinatorik – multiplikationsprincipen etc.

Exempel (2017-05-30 uppgift 3a)

Hur många ternära följder (tre symboler: 0, 1, 2) av längd 100 finns det med villkoret att de första 10 siffrorna är 1 1 1 1 0 0 0 2 2 2?

Lösning

Rita upp följden (tomma platser): $\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 2\ 2}_{\text{plats 1–10 tagna}}\ \underbrace{\_\ \_\ \ldots}_{\text{plats 11–100 lediga}}$

på plats 11: antingen 0, 1, 2 $\Rightarrow$ 3 val
12 — " — 0, 1, 2 $\Rightarrow$ 3 val
⋮
100: — " — 0, 1, 2 $\Rightarrow$ 3 val

$\left.\begin{array}{l}\text{11 till 100} = 90 \text{ platser} \\ \text{varje plats} = 3 \text{ val}\end{array}\right\} \Rightarrow 3\times3\times3\times\ldots\times3 = 3^{90}$ valmöjligheter.

Exempel (2017-05-30 uppgift 3c)

Hur många funktioner $f: A = \{1, \ldots, 100\} \to B = \{0, 1, 2, 3\}$ finns det med villkoret att alla talen 91 t.o.m. 100 avbildas på siffran 0?

Lösning

Funktion $\Rightarrow$ relaterar input till output. Vill ordna så att:

$\{1, \ldots, 100\}$ $\{0, 1, 2, 3\}$

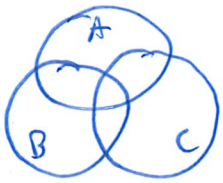
$\left.\begin{array}{l}1 \to 0, 1, 2 \text{ eller } 3 \\ 2 \to 0, 1, 2 \text{ eller } 3 \\ \vdots \\ 90 \to 0, 1, 2 \text{ eller } 3\end{array}\right\}$ 4 val $\quad \left.\begin{array}{l}91 \to 0 \\ \vdots \\ 100 \to 0\end{array}\right\}$ 1 val

$\left.\begin{array}{l}\text{Första 90: 4 val} \\ \text{Sista 10: 1 val}\end{array}\right\} \Rightarrow 4^{90}\cdot1^{10} = 4^{90}$ st

Principen om Inklusion och Exklusion (PIE)

- "På hur många sätt kan man välja/ordna ... så att ..."
- Beräkna union av flera mängder
- Lägg ihop alla mängder (Inklusion)
  Dra bort dubbelräknade delmängder (Exklusion)

Exempel

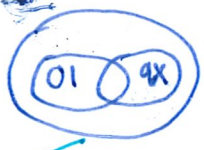


Vi söker $\underbrace{|A \cup B \cup C|}_{\text{"storleken" av denna figur}} = |A| + |B| + |C|$
$- [|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|]$
$+ |A \cap B \cap C|$

1) Började med att lägga ihop alla. Men!
Räknar vissa områden dubbelt.
⇒ 2) Dra bort dubbelräkningar. Men!
Drar bort ett område för mycket.
⇒ 3) Lägg tillbaka området.

Generellt: $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$
alternerande + och − $\begin{cases} -[|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots] \\ \pm |A_1 \cap \ldots \cap A_n| \end{cases}$

Exempel: (2012-05-30 uppgift 3) På hur många sätt kan man ordna symbolerna $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X\}$ så att mönstret inte innehåller 01 eller 9X?



$\mathcal{U}$ = totala antalet kombinationer

1) **Idé:** ta alla möjliga kombinationer − sätt där 01 eller 9X finns
= innehåller inte 01 eller 9X.

2) **Formelt:** $|\mathcal{U}| - \underbrace{|01 \cup 9X|}_{\text{Enligt PIE är detta } = |01| + |9X| - |01 \cap 9X|}$

$= |\mathcal{U}| - [|01| + |9X| - |01 \cap 9X|]$

3) **Totalen, $\mathcal{U}$:** 11 symboler, $\{0, 1, \ldots, 9, X\}$. Ska göra en följd.
Följd med 11 platser. På plats 1 kan vi välja en av 11 symboler. På plats 2 kan vi välja en av 10 symboler. osv. ⇒ 11! sätt

4) **Kombinationen 01:** Bilda symbolen 01. Tvinga den att vara med!
Nya symboler: $\{01, 2, \ldots, 9, X\}$ (10 symboler) ⇒ 10! sätt

5) **Kombinationen 9X:** På samma sätt som 01 ⇒ 10! sätt

6) **Kombinationen 01 och 9X:** $\{01, 2, \ldots, 8, 9X\}$ ⇒ 9! sätt
Eftersom $|01|$ även kan innehålla 9X och $|9X|$ kan innehålla 01.

7) **Svar:** $|\mathcal{U}| - [|01| + |9X| - |01 \cap 9X|]$ (Total − "01 eller 9X")
$= 11! - [10! + 10! - 9!]$

Ekvationer av typ $x_1 + \dots + x_n = k$

- Vissa kombinatoriska problem kan "översättas" till att lösa problemet:
  Bestäm antal lösningar till ekvationen $x_1 + \dots + x_n = k$
- Svaret är känt, antalet är $\binom{k+n-1}{k}$, k = konstant i HL, n = antal variabler

Exempel (2012-08-16 uppgift 3)

Ett land har en riksdag med 151 platser och 3 partier. På hur många sätt kan man välja till riksdagen så att inget parti får egen majoritet?

Lösning

1) Sätt upp en variabel för varje parti (antal röster)

$x_1 + x_2 + x_3 = 151$ måste gälla

2) "Inget parti får egen majoritet" $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le x_i \le 75$ (ty om t.ex $x_2 \ge 76 \Rightarrow$ parti 2 har majoritet)

3) Giltiga lösningar = $\underbrace{\text{Totalt antal lösningar}}_{\text{inga villkor}}$ − $\underbrace{\text{ogiltiga lösningar}}_{\text{något } x_i \ge 76}$

4) Totalt antal lösningar:

Vi har $x_1 + x_2 + x_3 = 151$ med $k = 151$ och $n = 6$ variabler

$\Rightarrow \binom{151+3-1}{151} = \binom{153}{151}$ lösningar

5) Ogiltiga lösningar:

Anta att $x_1 \ge 76$. Detta ger parti 1 majoritet $\Rightarrow$ ogiltigt!

Idé: gör variabelbyte $t = x_1 - 76 \ge 0$

För my ekvation: $x_1 + x_2 + x_3 = 151$

$\hookrightarrow \underbrace{x_1 - 76}_{t} + x_2 + x_3 = 151 - 76$

$\Leftrightarrow t + x_2 + x_3 = 75$

- Notera att denna nya ekvation är på formen vi kämner till.
  $k = 75$, $n = 3$ st variabler $\Rightarrow \binom{75+3-1}{75} = \binom{77}{75}$ lösningar.
- På exakt samma sätt för x_2 och x_3 (totalt 3 st val).
- Vi får $3 \times \binom{77}{75}$ st ogiltiga lösningar. (*)

6) Svar: Giltiga lösningar = Totalt antal lösningar − ogiltiga lösningar

$= \binom{153}{151} - 3\binom{77}{75}$ st.

(*) Anmärkning: Det vi precis beräknat är antal ogiltiga lösningar där en variabel (x_1) är ≥ 76. Det återstår att kontrollera om två eller t.om. tre variabler ≥ 76. I sådna fall har vi dubbelräknat dessa kombinationer i händelsen "$x_1 \ge 76$" och behöver använda PIE för att växelvis inkludera/exkludera.

Men, i detta fall är "två variabler ≥ 76" omöjligt ty $76 + 76 = 152 > 151$ som är HL. P.s.s för tre variabler. Så det räckte med att stanna vid en variabel.

Ekvationer av typ $x_1 + \dots + x_n = k$

- Vissa kombinatoriska problem kan "översättas" till att lösa problemet: Bestäm antal lösningar till ekvationen $x_1 + \dots + x_n = k$
- Känt svar, antalet är $\binom{k+n-1}{k}$. $k =$ konstant i HL, $n =$ antal variabler

Exempel (2017-08-17 uppgift 3)

Hur många positiva heltal mindre än 100 000 finns det om summan av dess siffror är mindre än eller lika med 20?

Lösning

- "mindre än 100 000" $\Rightarrow$ 0 till 99 999 (5 siffror).
- Tänk er talet 53847. Varje siffra kan representeras av en variabel

$$\underset{x_1}{5}\ \underset{x_2}{3}\ \underset{x_3}{8}\ \underset{x_4}{4}\ \underset{x_5}{7}$$

Vi ser att $0 \le x_i \le 9$ måste gälla.

- "Summan av siffrorna ≤ 20" $\Rightarrow x_1 + \dots + x_5 \le 20$
- Problemet är alltså nu: Antal lösningar till $\begin{cases} x_1 + \dots + x_5 \le 20 \\ 0 \le x_i \le 9 \end{cases}$

1) Jämför med känd lösning. Likhet, alltså $x_1 + \dots + x_n = k$. Vi har $\le k$.
$\Rightarrow$ inför en slackvariabel som "fångar upp" skillnaden

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_5 \le 20 \\ 0 \le x_i \le 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_5 + s = 20 \\ 0 \le x_i \le 9,\ s \ge 0 \end{cases}$$

← nu på samma form!

2) Idé: Beräkna $\underbrace{\text{"totalt antal lösningar"}}_{\text{inga villkor}} - \underbrace{\text{"ogiltiga lösningar"}}_{\text{något } x_i \ge 10}$ ← återkommande mönster!

3) Totalt antal lösningar: $\begin{cases} k = 20 \\ n = 6 \text{ variabler} \end{cases} \Rightarrow \binom{20+6-1}{20} = \binom{25}{20}$

4) Ogiltiga lösningar: Anta att $x_1 \ge 10$. Detta är ogiltigt. Idé: Gör variabelbyte
$t = x_1 - 10 \ge 0$

Får ny ekvation som blir: $x_1 + \dots + x_5 + s = 20$

$$\hookrightarrow \underbrace{(x_1 - 10)}_{=t} + \dots + x_5 + s = 20 - 10$$

$$\iff t + \dots + x_5 + s = 10$$

Känd lösning! $\left.\begin{matrix} k = 10 \\ n = 6 \text{ variabler} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \binom{10+6-1}{10} = \binom{15}{10}$

P.s.s för x_2, x_3, x_4, x_5 (5 val)

$\Rightarrow |x_i \ge 10| = 5 \times \binom{15}{10}$

Men, då har vi dubbelräknat lösningar där två variabler ≥ 10.
Använd PIE för att räkna bort dessa.

• Tagit bort alla lösningar där en variabel ≥ 10.

Två variabler ≥ 10?

Kalla det för $|x_i \geq 10 \cap x_j \geq 10|$.

Idé: Gör samma variabelbyte fast två ggr.

$$x_1 + \dots + x_5 + s = 20 \longrightarrow (x_1 - 10) + (x_2 - 10) + \dots + x_5 + s = 20 - 10 - 10$$

$$\begin{cases} k = 0 \\ n = 6 \text{ variabler} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\binom{0+6-1}{0}}_{= \binom{5}{0} = 1} \text{ lösningar}$$

Detta var för en kombination $x_1 \cap x_2$

p.s.s. för $x_1 \cap x_3$, $x_1 \cap x_4$ ... } Hur många kombinationer totalt?

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 \text{ variabler att välja mellan } (x_1, \dots, x_5) \\ \text{Ska välja 2 st} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \text{ kombinationer}$$

Totalt: $|x_i \geq 10 \cap x_j \geq 10| = 10 \text{ val} \times 1 \text{ lösning}$
$= 10$ lösningar.

Tre variabler ≥ 10?

Idé, återanvänd samma princip

$$x_1 + \dots + x_5 + s = 20 \longrightarrow (x_1 - 10) + (x_2 - 10) + (x_3 - 10) + \dots + x_5 + s = \underbrace{20 - 10 - 10 - 10}$$

OBS! HL < 0

Men vi vet att

$x_i \geq 0$ och $s \geq 0$

S.S. här finns inga lösningar!

P.S.S. för fyra variabler ≥ 10
och fem variabler ≥ 10!

Svar: Total − ogiltiga lösningar

$$= \binom{25}{20} - \left[5\binom{15}{10} - 10 + \underbrace{0 - 0 + 0}\right]$$

$$= \binom{25}{20} - 5\binom{15}{10} + 10$$

3, 4, 5 variabler ≥ 10 har 0 lösningar

alternerande +/− (lägg till och dra bort pga. dubbelräkningar och PIE)