Föreläsning 6

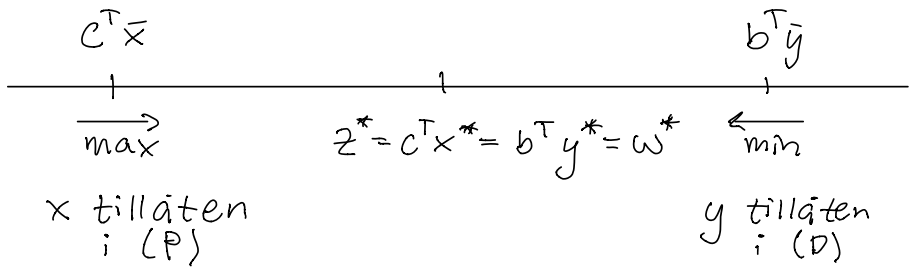
TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Linjär programmering

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

LP-dualitet, forts

primal	dual
$z^* = \max z = c^T x$	$w^* = \min w = b^T y$
(P) då $Ax \leq b \mid y$	(D) då $A^T y \geq c \mid x$
$x \geq 0$	$y \geq 0$
n-variabler	m-variabler
m-bivillkor	n-bivillkor



Även optimallösningar x^* och y^* är relaterade

SATS:

Givet ett x^* som är tillåtet i (P). Då är x^* optimal omm det finns ett y^* som är tillåtet i (D) sådant att

$$\begin{cases} y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \\ x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \end{cases}$$

Bevis:

$\Rightarrow$: (x^* optimal $\Rightarrow \ldots$)

Följdsatsen tidigare $\Rightarrow$ (D) har en optimallösning, så y^*, och

$$w^* = z^*$$

Då fås:

$$z^* \underset{\substack{\uparrow \\ x^* \text{ optimal}}}{=} c^T x^* \overset{\substack{A^T y^* \geq c \\ x^* \geq 0}}{\leq} (A^T y^*)^T x^* = y^{*T} A x^* \underset{\substack{\uparrow \\ Ax^* \leq b \\ y^* \geq 0}}{\leq} y^{*T} b = b^T y^* =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ w^* \text{ optimal}}}{=} w^* = z^*$$

Antså gäner likhet överallt!

Alltså:

$$y^{*T} A x^* = y^{*T} b \Rightarrow y^{*T}(b - Ax^*) = 0$$

$$c^{*T} x^* = (A^T y^*)^T x^* \Rightarrow x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

$\Leftarrow$: (det finns ett y^* sådant att... $\Rightarrow$...)

$$\left.\begin{array}{l} y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \\ x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c^T x^* = b^T y^*$$

$$\left.\begin{array}{l} x^* \text{ och } y^* \text{ tillåtna} \\ c^T x^* = b^T y^* \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stark} \\ \text{dualitet}}}{\Rightarrow} x^* \text{ (och } y^*\text{) optimal}$$

./.

Låt

$$A = (A_1, \dots, \underset{\text{kolumn } j}{A_j}, \dots, A_n) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_j^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{pmatrix}$$

Då fås:

$$\underset{(x_1^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)}{x^{*T}} \overbrace{(A^T y^* - c)}^{\begin{pmatrix} A_1^T y^* - c_1 \\ \vdots \\ A_j^T y^* - c_j \\ \vdots \\ A_n^T y^* - c_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j^*}_{\geq 0} \underbrace{(A_j^T y^* - c_j)}_{\geq 0}}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow x_j^* (A_j^T y^* - c_j) = 0$$

för $j = 1, \dots, n$

Analogt med

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \leftarrow \text{rad } i$$

fås:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \Leftrightarrow y_i^* (b_i - a_i^T x^*) = 0 \text{ för } i = 1, \dots, m$$

Kallas komplementsvillkor.

Ger samband mellan x^* och y^*.

Optimalitetsvillkor för LP:

- Primal tillåtenhet
- dual tillåtenhet
- komplementaritet

Ex: Är

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

optimal?

$$z^* = \min z = 18x_1 + 15x_2 + 16x_3$$

då

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 9 \quad \Big| \; y_1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 12 \quad \Big| \; y_2 \\ x_1, \; x_2, \; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- x^* tillåten?

JA!

- Dual:

$$w^* = \max w = 9y_1 + 12y_2$$

då

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \leq 18 & \Big| \; x_1 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 15 & \Big| \; x_2 \\ 4y_1 + 2y_2 \leq 16 & \Big| \; x_3 \\ y_1, \; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. mm
2. Transponera bivillkor
3. Se tabell för, $\geq$, $\leq$, $=$?

· Använd komplementvillkoren för att räkna ut ett y^*

Komplementvillkor:

$$x_1^*(18 - 4y_1^* - 3y_2^*) = 0 \overset{x_1^* = 1/2 > 0}{\Longrightarrow} 4y_1^* + 3y_2^* = 18$$

$$x_2^*(15 - 2y_1^* - 3y_2^*) = 0 \overset{x_2^* = 7/2 > 0}{\Longrightarrow} 2y_1^* + 3y_2^* = 15$$

$$x_3^*(16 - 4y_1^* - 2y_2^*) = 0 \Rightarrow \text{inget, ty } x_3^* = 0$$

$$y_1^*(4x_1^* + 2x_2^* + 4x_3^* - 9) = 0 \text{ ger inget, ty } (\ldots) = 0$$

$$y_2^*(3x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* - 12) = 0 \text{ ger inget, ty } (\ldots) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 4y_1^* + 3y_2^* &= 18 \\ 2y_1^* + 3y_2^* &= 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 3/2 \\ y_2^* = 4 \end{cases}$$

· y^* tillåten?

$4y_1^* + 3y_2^* = 18 \leq 18$ OK!

$2y_1 + 3y_2^* = 15 \leq 15$ OK!

$4y_1^* + 2y_2^* = 14 \leq 16$ OK!

$y \geq 0$ OK!

JA!

$\therefore$ Alltså är x^* optimal! ☺

Känslighetsanalys för LP

$$z^* = \min z = c^T x$$
$$\text{då} \quad Ax = b \mid y$$
$$x \geq 0$$

Problemet beskriver i optimalbasen:

$$z^* = \min z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{då} \quad I x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$
$$x_B, \quad x_N \geq 0$$

Optimum:

$$\begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad z = c_B^T B^{-1} b$$

Dualt optimum

$$y^* = (c_B^T B^{-1})^T$$

Observera att

$$\underline{\bar{c}_N^T} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \underline{c_N^T - y^{*T} N}$$

På komponentform:

$$(\bar{c}_{m+1}, \ldots, \bar{c}_n) = (c_{m+1}, \ldots, c_N) - y^{*T} (A_{m+1}, \ldots, A_n)$$
$$= (c_{m+1} - y^{*T} A_{m+1}, \ldots, c_n - y^{*T} A_n)$$

Alltså:

$$\bar{c}_j = c_j - y^{*T} A_j$$

gäller för alla icke-basvariabler.

1) Värdet av förändringar i b

Betrakta z^* som en funktion av b, dvs

$$z^* = z^*(b)$$

Då gäller:

$$z^*(b) = c_B^T B^{-1} b = y^{*T} b = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i$$

Alltså:

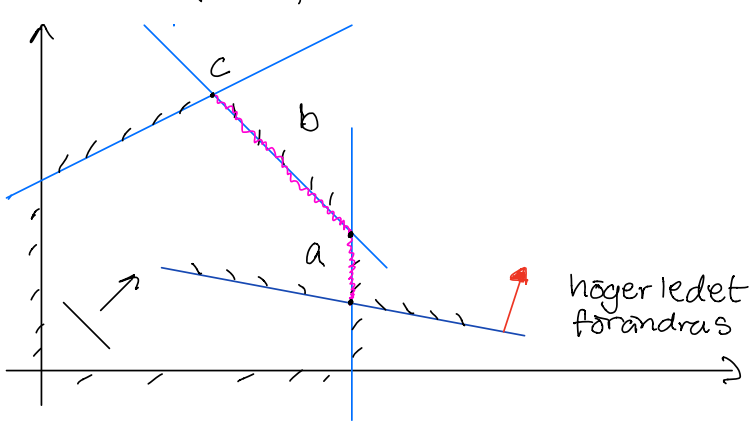
$$\frac{\partial z^*(b)}{\partial b_i} = y_i^*$$

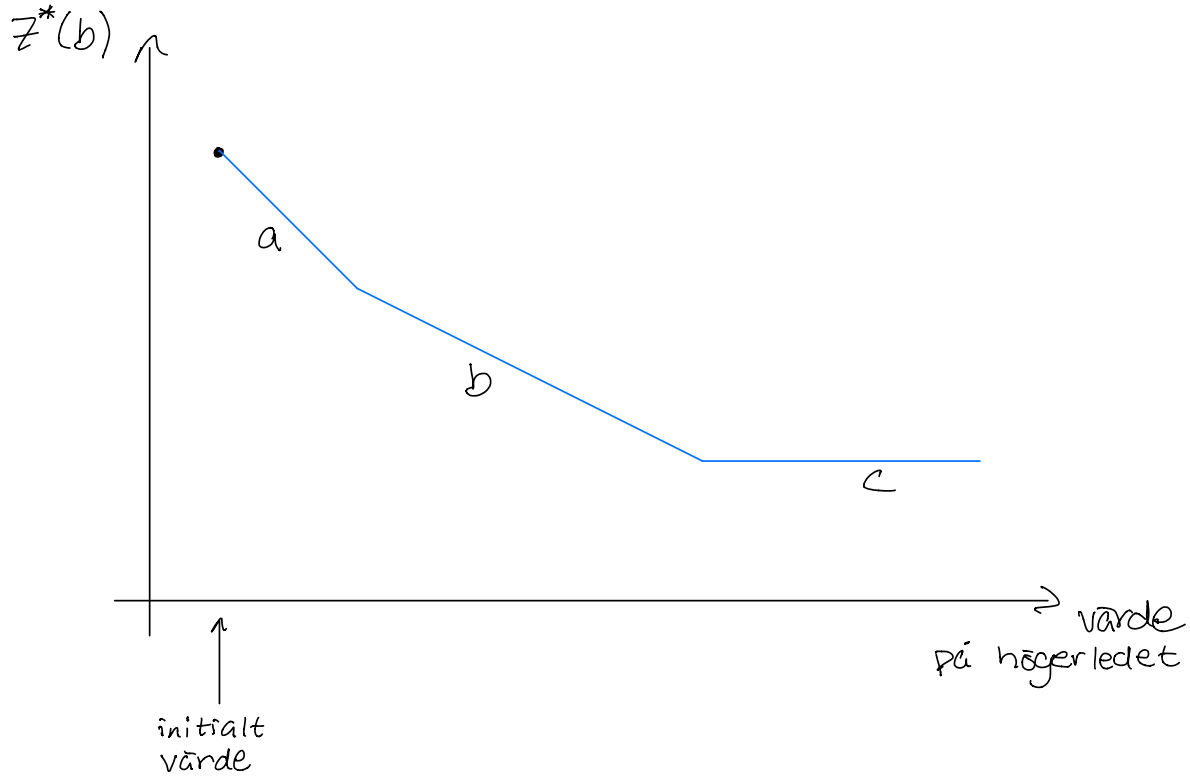
Dvs y_i^* ger marginella värdet av b_i.

Kallas därför även skuggpriser.

└ dualvariabler

OBS! Beror på optimalbasen.





2) Villka förändringar i b ger samma optimalbas och skuggpriser?

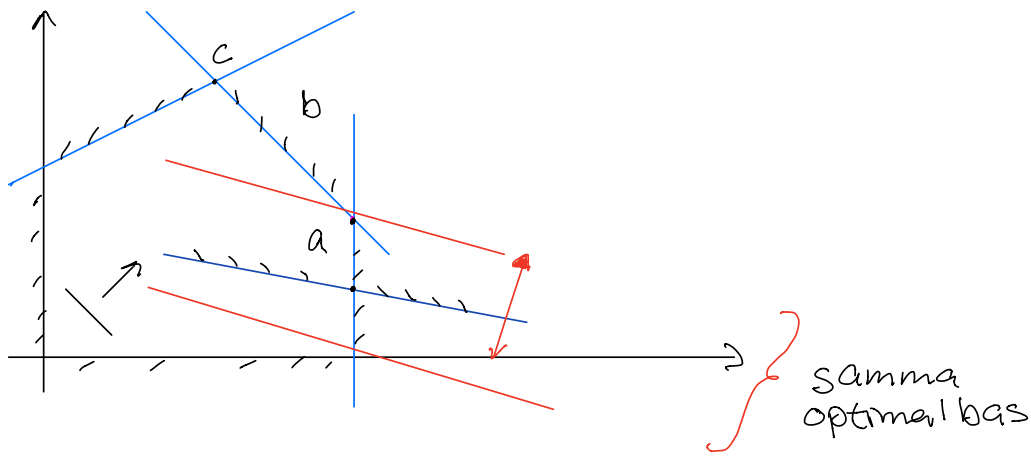
För villka

$$b^{ny} = b + \underbrace{\Delta b}_{\text{störning}}$$

fås samma optimalbas?

$$x_B^{*ny} = B^{-1} b^{ny} = B^{-1} b + B^{-1} \Delta b = x_B^* + B^{-1} \Delta b \geq 0$$

$$\Rightarrow B^{-1} \Delta b \geq -x_B^* \quad \text{(krav på } \Delta b\text{)}$$



8) Ny variabel tillkommer

Variabel x_{n+1} med koefficienter $\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix}$ läggs till. x_{n+1} är "ny", dvs $x_{n+1} = 0$, dvs icke-basisk!

Beräkna:

$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - y^{*T} A_{n+1}$,

$\bar{c}_{n+1} \geq 0 \Rightarrow x^*_{n+1} = 0$, dvs ingen förändring.

$\bar{c}_{n+1} < 0 \Rightarrow x_{n+1}$ inkommande, osv.

$a7 = \$7000$

$d_0 = 10$

$d_1 = \$0$

$a_0 = \$4000$

$a_1 = \$5000$

loop:

$a_2 = \$4000$

$d_1 = \$6a$, $a_1 = \$5001$

$d_1 = a$ $\qquad$ 15= 0000 1111 7

$a_2 = \$400a$

$d_4 = 25 = \$19$

$d_4 = \$20d + \$19 = \$46$

$6a = \left.\begin{matrix} 0110 & 1010 \\ 0000 & 1010 \end{matrix}\right\} = a$

$d_0 = 8$

$a_0 = \$4000$

$a_1 = \$5010$

loop

$d_4 = \underline{ff}, \quad a_0 = \$4001$

$a_1 = \$500f, \quad d_1 = 4e$

$d_4 = ff + 4e = 14d$

$86 + cf = 55$

$86 + x = 75$

$134 + 207 = 341$

$75 - 86 =$

$117 - 134$