När origo inte är tillåten i bivillkor

FAS I
- Inför artificiella variabler ($w = a_1 + a_2$)
- Skriv om målfunktion som min-problem
- Lös simplex

FAS II
- Tillåten baslösning
- Fas I uttrycker z med ickebasvariabler

Inkommande: max = störst negativa i z-rad
min = minst negativa i z-rad

Utgående: Alltid minsta värde (bryter först) ej neg!

DUALITET

frivariabel ⇔ =-villkor

Normalform

- Max-problem ≤-villkor, variabler ≥ 0
- Min-problem ≥-villkor, variabler ≥ 0

1) Kolla max/min i primal. Kolla villkor med Normalform & sätt ut rätt tecken på dualvariablerna

2) Kolla max/min i dual. Tänk x som variabler & kolla normalform för att sätta ut rätt tecken

Sats Om x & v är tillåtna lösningar till (P) & (D) & $c^Tx = b^Tv$ så är x & v optimala lösningar till respektive problem dvs $z^* = w^*$

En tillåten lösning i det ena problemet ger en optimistisk av det andra

Komplementaritetsvillkor

- $v^T(Ax - b) = 0$
- $x^T(A^Tc - c) = 0$

KKT-VILLKOR

Primal tillåtenhet

$g_1(\bar{x}) \le b_1$

$g_2(\bar{x}) \le b_2$

$g_3(\bar{x}) \le b_3$

Dual tillåtenhet

$\nabla f(\bar{x}) = v_1 \nabla g_1(\bar{x}) + v_2 \nabla g_2(\bar{x}) + v_3 \nabla g_3(\bar{x})$

$v_1\ v_2\ v_3 \ge 0$

$x_1 + x_2 \ge 4$	v_1	$v_1 - v_2 \le 1$	x_1
$x_1 + x_2 \ge 2$	v_2	$v_1 + v_2 \le 3$	x_2
$x_1, x_2 \ge 0$		$v_1\ v_2 \ge 0$	

Komplementaritet

$v_1(b_1 - g_1(\bar{x})) = 0$

$v_2(b_2 - g_2(\bar{x})) = 0$

$v_3(b_3 - g_2(\bar{x})) = 0$

Exempel

$v_1(4 - x_1 - x_2) = 0$

$v_2(2 + x_1 - x_2) = 0$

Riktningar

- Descentriktning: $\nabla f(x^{(k)})^T \cdot d^{(k)} < 0$ (minproblem) skalär
- Ascentriktning: $\nabla f(x^{(k)})^T \cdot d^{(k)} > 0$ (maxproblem)

- Brantaste-lutning minprob: $d_B = -\nabla f(x^{(0)})$
  maxprob: $d_B = \nabla f(x^{(0)})$
- Newtonriktning $d_N = -H^{-1} \nabla f(x^{(0)})$
- Marquards $d_m = -M(x^{0})^{-1} \nabla f(x)$

Algoritmbeskrivning

Steg 0: utgå från godtycklig startpunkt $x^{(0)}$ sätt $k=0$

Steg 1: Bestäm $\nabla f(x^k)$ & beräkna sökriktningen d^k
Om Newtonmetod, räkna ut $H^{-1}(x^k)$

Steg 2: Är $\nabla f(x^k) = 0$ har optimum hittats
alt $\|\nabla f(x^k)\| < \epsilon$ givet i uppgiften

Steg 3: Bestäm steglängd $t^{(k)}$
Om Newtonmetod är $t^{(k)} = 1$
Annars räkna ut t

Steg 4: Beräkna ny punkt enligt
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)} d^{(k)}$, sätt in i funktionen, derivera map t, räkna ut t & sätt in i f. Om $\nabla f = 0$ Optimum

Steg 5: $k := k + 1$ & gå till Steg 1

Marquards

Exempel: $M(\bar{x}) = k + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} =$

/k ett värde > $|\lambda_{min}|$/ $= \begin{pmatrix} 1+k & -1 \\ -1 & 2+k \end{pmatrix}$

---

max $z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
då $2{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$ ger $+s_1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ ger a_1
$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 5$ ger $-s_2 + a_2$
$x_1\ x_2\ x_3 \ge 0$

3 bivillkor ⇒ 3 basvariabler

max $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
då $x_1 + x_2 + x_3 \le 3$
$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 4$
$x_1\ x_2\ x_3 \ge 0$

Orginaltablå

bas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	-3	-2	-5	0	0	0
s_1	0	1	1	1	1	0	3
s_2	0	1	-2	2	0	1	4

Optimaltablå

bas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	1,25	0	0	3,5	0,75	13,5
x_2	0	0,25	1	0	0,5	-0,25	0,5
x_3	0	0,75	0	1	0,5	0,25	2,5

$= (x_2\ x_3) = (0{,}5\ \ 2{,}5)$

x_N: icke basvariabler optimaltablå
$= (x_1\ s_1\ s_2) = (1{,}25\ \ 3{,}5\ \ 0{,}75)$

C_B^T: basvariabler (målfunk. koeff) orginaltablå
$= (x_2\ x_3) = (2, 5)$

C_N^T: icke basvariabler (målfunk. koeff) orginaltablå
$= (x_1\ s_1\ s_2) = (3\ 0\ 0)$

$B^{-1}N$: Alla ickebas optimaltablå
$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

v^T: Optimala dualvärden (skuggpris)
$= (3{,}5\ 0{,}75)$

B^{-1}: Alla slackvariabler
Läs av kolumnerna under slackvariablerna. Kom ihåg att byta tecken för ≥-villkor

a_{ny}: När ny variabel ska införas fås detta värde i uppgiften

$\bar{C}_B^T$: Reducerad kostnad, basvariabler
$= (x_2\ x_3) = (0, 0)$

$\bar{C}_N^T$: Reducerad kostnad, ickebas
$= (x_1\ s_1\ s_2) = (1{,}25\ \ 3{,}5\ \ 0{,}75)$

$c_B^T \cdot B^{-1} = v^* = (3{,}5\ 0{,}75)$

Känslighetsanalys

Ny variabel: $\bar{c}_{Ny} = c_{Ny} - v^T a_{ny}$ (Inkomst − kostnad = vinst)

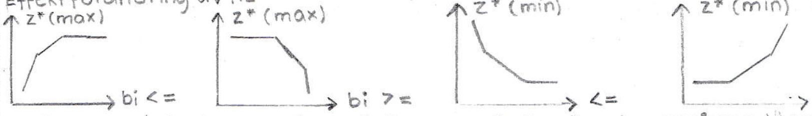
$\bar{b}$ förändring: $B^{-1}b \ge 0$ (förändring av HL) i bivillkor

Förändring av variabel: $\bar{C}_N^T = C_N^T - C_B^T \cdot B^{-1}N$ ≥ ← Minproblem, ≤ ← Maxproblem

Skuggpris (v^*)

Bivillkorstyp	Ökning av bi	Påverkar målf. max	Påverkar målf. min	Skuggpris max	Skuggpris min
≤-villkor	Relaxation	ökning	minskning	≥ 0	≤ 0
≥-villkor	Restriktion	minskning	ökning	≤ 0	≥ 0

Effekt förändring av HL



När HL ökar blir z* större vilket dåligt för min

Addera variabel → utökar frihetsgraden, mängden tillåtna lösningar blir större, RELAXATION

Ta bort variabel → Inför villkor som sätter variabeln till noll, restriktion

Intervallhalvering

Ex: $x^{(k+1)} = x^k + td^k$

Osäkerhetsintervall: 0,1 enheter Intervall start: $[0,4] = [\alpha_k, \beta_k]$

Mittpunkt: $m_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$ Beräkna $f'(m_k)$: $f'(m_k) < 0$ (minprob) ⇒ $[m_k, \beta_k]$
$f'(m_k) > 0$ ⇒ $[\alpha_k, m_k]$

Exempel: $f'(t) = 2t^2 - 3t - 5$

k	α_k	m_k	β_k	$f'(m_k)$	$\beta_k - \alpha_k$
0	0	2	4	-3	4
1	2	3	4	4	2
2	2	2,5	3	0	1

$f'(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 5 = -3 < 0$

$f'(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 5 = 4 > 0$

$f'(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5^2 - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 0$!

Fortsätter till $f' = 0$ eller $(\beta_k - \alpha_k) \le 0{,}1$ Antal Iterationer: $\frac{1}{2}^N \le \frac{0{,}01^*}{\beta_k - \alpha_k} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{0{,}01}{3-0}$

SMÅTT & GOTT

- Fas I alltid minproblem
  Fas II beror på problemet
- Aktiva bivillkor - likhet
- Om förflyttning ska ske, kolla linjen var s inkommande & se vilka punkter som det går att ta sig vidare från
- **STARK DUALITET**
  $z^* = w^*$ Måste existera en tillåten lösning i resp prob.
- **SVAG DUALITET**
  En tillåten lösning i det ena problemet ger alltid en optimistisk skattning av det optimala målfunkvärdet i det andra problemet

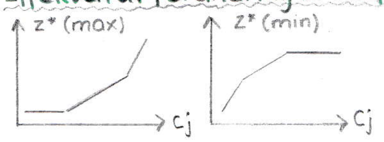
SIMPLEX - KOM IHÅG

Max
- Ink: Välj mest negativt
- Utg: Bryter först ≥0
- z^* funnit när z-rad är positivt

Min
- Ink: Välj mest positivt
- Utg: Bryter först ≥0
- z^* funnit när z-rad är negativt

- Fundamentalsatsen för LP säger att optimum alltid finns i minst en extrempunkt

Effekten av förändring av målfunktionen



Basvar	z	x_B^T	x_N^T	x_S^T	$\bar{b}$
z	1	0^T	$-(C_N^T - C_B^T B^{-1}N)$	$C_B^T B^{-1}$	$C_B^T B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1}N$	B^{-1}	$B^{-1}b$

Taylor-approximation

Första ordningen
$f_1(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k)$

Andra ordningen
$f_2(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x^k)(x - x^k)$

max c^Tx (P) då $Ax \le b$: $v \ge 0$, $x \ge 0$

min $w = b^Tv$ då $A^Tv \ge c$: x, $v \ge 0$

Begränsad optim. ⟷ Begränsad opti.
Obegränsad opt. ⟷ lösning saknas
Lösning saknas ⟷ Obegränsad eller saknas

ink. lager + produktion − efterfrågan = utg. lager (skapa variabel som håller ordning på lager)

TIPS FAS II
- Behåll basv & stryk hela a-kolumnerna. Behåll hela kolumn men byt ut z-rad till icke basvariabler

TIPS FAS I
- Lägg till a på ≥-villkor & =
- a blir bas var. i första hand, sen 1
- Alltid min, uttryck z i ickebas
- Klar när inga a som bas & $w^* = 0$. Om $w > 0$ saknar lösning

- **Pessimistisk** skattning → Tillåten skattning
  Tillhör mängden
- Bästa **optimistiska** skattningen är den närmast optimum
- $f(x)$ är pessimistisk skattning, om den är tillåten
  $h(v)$ är optimistisk skattning

Ex: $\min f(x_1 x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1$

$3x_1^2 - 2x_2 \le 6$

Testa för $v=0$ & $v=-1$

Lagrangefunk: $L(x,v) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1 + v(6 - 3x_1^2 - 2x_2)$

$6v + \underbrace{(2-3v)x_1^2 - 6x_1}_{\text{sub 1}} + \underbrace{5x_2^2 + 2vx_2}_{\text{sub 2}} \quad v \le 0$

Lagrange-Duala funktionen:

$h(v) = \min_x L(x,v) =$

$6v + \min_{x_1}\left\{(2-3v)x_1^2 - 6x_1\right\} + \min_{x_2}\left\{5x_2^2 + 2vx_2\right\}$

Lagrange-Duala problemet:

$\max h(v) \quad v \le 0$

$v=0 \quad h(0) = 6\cdot 0 + \underbrace{\min_{x_1}\left\{2x_1^2 - 6x_1\right\}}_{f_1(x_1)} + \underbrace{\min_{x_2}\left\{5x_2^2\right\}}_{f_2(x_2)}$

$f_1(x_1) = 2x_1^2 - 6x_1 \Rightarrow f_1'(x_1) = 4x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2$

$f_2(x_2) = 5x_2^2 \Rightarrow f_2'(x_2) = 10x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$h(0) = 0 + f_1(3/2) + f_2(0) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\cdot\frac{3}{2} + 0 = -9/2$ **Optimistisk skattning**

Är $x = (3/2, 0)$ tillåten i bivillkor $3x_1^2 - 2x_2 \le 6$?

$VL = 3\cdot(3/2)^2 - 0 = \frac{27}{4} \not\le 6$ NEJ!

EJ TILLÅTEN ⇒ Ingen pessimistisk skattning

$v=-1 \quad h(-1) = -6 + \underbrace{\min_{x_1}\left\{5x_1^2 - 6x_1\right\}}_{f_1(x_1)} + \underbrace{\min_{x_2}\left\{5x_2^2 - 2x_2\right\}}_{f_2(x_2)}$

$f_1(x_1) = 5x_1^2 - 6x_1 \Rightarrow f_1'(x_1) = 10x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$f_2(x_2) = 5x_2^2 - 2x_2 \Rightarrow f_2'(x_2) = 10x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/5$

$h(-1) = -6 + 5(3/5)^2 - 6(3/5) + 5(1/5)^2 + 2(1/5) = -8$ **Optimistisk skattning**

Tillåten?

$VL = 3\cdot(3/5)^2 - 2(1/5) = \frac{17}{25} \le 6$ OK!

TILLÅTEN ⇒ Pessimistisk skattning

$f(3/5; 1/5) = 2\cdot(3/5)^2 + 5(1/5)^2 - 6(3/5) = \ldots = -\frac{67}{25}$ pessimistisk skattning

- $h(v)$ ger alltid **optimistisk skattning** av $f(x^*)$

$h(0) = -9/2 \le f(x^*)$
$h(-1) = -8 \le f(x^*)$ $\Big\}\ -9/2 \le f(x^*)$

- Varje tillåten lösning ger en **pessimistisk** skattning

$f(3/5; 1/5) = -\frac{67}{25} \ge f(x^*)$

SLUTSATS: $-9/2 \le f(x^*) \le -\frac{67}{25}$

$h(v) \le h(v^*) \le f(x^*) \le f(x)$

Def 11.2

Punkten $(x^* v^*)$ är en sadelpunkt till $L(x,v)$ om

$L(x^* v) \le L(x^* v^*) \le L(x v^*)$

för alla x & $v \ge 0$

Definitionen av sadelpunkt säger att $L(x,v)$ har ett minimum med avseende på x & ett maximum med avseende på v i punkten (x^*, v^*)

Punkten (x^*, v^*) ska alltså vara en lösning till problemet $\max_{v \ge 0} \min_x L(x,v)$

Antag att det finns en punkt x^* som uppfyller KKT-villkoren. Om problemet då är konvext så är x^* både lokalt & globalt optimum.

Sats Sadelpunktsatsen

Om Lagrangefunktionen $L(x,v)$ har en sadelpunkt i (x^*, v^*) så är x^* en optimallösning till problemet.

KONVEXT PROBLEM

max-problem: konkav målfunktion, konvex mängd
min-problem: konvex målfunktion, konvex mängd

$f(\bar{x}) \le \bar{y}$

- $\bar{x} = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$
- $\bar{y} = \lambda f(x^{(0)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)})$

Mängden $X = \{x \cdot g(x) \le b\}$ är en konvex funktion om $g(x)$ är konvex

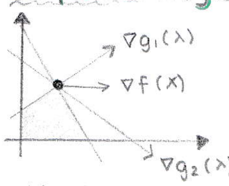
Motbevis konvex mängd

1) Välj två punkter $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$
2) Visa att $x^{(1)}$ & $x^{(2)}$ tillhör mängden
3) Bilda en ny punkt som linjärkomb. av dessa två punkter
   $\bar{x} = \lambda\cdot x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$ där $0 < \lambda < 1$
4) Välj λ så att $\bar{x} \notin X$, alltså att den nya punkten inte är tillåten
5) Visa att $\bar{x}$ inte är tillåten (visa att den bryter mot några villkor)

Motbevis konvex funktion

1) Välj två punkter $x^{(1)}\ x^{(2)}$ & beräkna $f(x^{(1)}), f(x^{(2)})$
2) Bilda en punkt som en linjärkomb. av dessa två punkter.
   $\bar{x} = \lambda\cdot x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$ där $0 < \lambda < 1$
3) Välj λ så att $\bar{x}$ bryter mot kravet att $f(\bar{x}) \le \lambda\cdot f(x^{(1)}) + (1-\lambda)\cdot f(x^{(2)})$

Grafisk lösning KKT



Vid min-problem, vänd på gradienten. & om ≥ villkor vänd bi ∇
dvs $-\nabla f(x)$ $(-\nabla g_1)$

Alt lösningar
$x^* = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$

$\nabla f(x)$ ska ligga i konen mellan gradienterna till bivillkoren.
∇g_1 & ∇g_2 ska peka bort från det tillåtna området
$\nabla f(\lambda) = 0$ i globalt optimum
om $\nabla f(x)$ inte ligger i konen måste bivillkoren $\cdot -1$

KONVEX-SATSER

- Snittet av konvexa mängder utgör en konvex mängd
- $X = \{x : g(x) \le b\}$ är konvex om funktion $g(x)$ är konvex
- $f_1(x)\ f_2(x) \ldots f_n(x)$ är konvexa funktioner $\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ konvex
- Låt $h(y)$ & $g(x)$ vara konvexa funktioner, plus att $h(y)$ är icke-avtagande, då är den sammansatta funktionen $h(g(x))$ en konvex funktion Ex: $e^{f(x)}$ $e \to$ konvex $f(x) \to$ konvex $\}\ e^{f(x)} \to$ konvex
- Låt H vara Hessianen till $f(x)$. Om H är positiv (semi)definit för alla x, då är $f(x)$ en strikt konvex funktion

Titta på egenvärden

$\lambda > 0 \Rightarrow$ positiv definit → konvex
$\lambda \ge 0 \Rightarrow$ positiv semidefinit → konvex
$\lambda < 0 \Rightarrow$ negativ definit → konkav
$\lambda \le 0 \Rightarrow$ negativ semidefinit → konkav

$f(x_1 x_2) = -8x_1 + 2x_2^2 + 5x_1x_2 + x_1$

$f'(x_1 x_2) = \begin{pmatrix} -16x_1 + 5x_2 + 1 \\ 4x_2 + 5x_1 \end{pmatrix}$

$f''(x_1 x_2) = H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Frank-Wolfe

- Problem konvext
- Icke-linjär målfunktion, linjära bi

Ex: $\min f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1^2 - 3{,}5x_1$

$\left.\begin{array}{ll} x_1 + x_2 \le 2 & 1 \\ -x_1 + x_2 \le 1 & 2 \\ 5x_1 + x_2 \le 3 & 3 \\ x_1\ x_2 \ge 0 & \end{array}\right\}\ X$

0: $x^0 = \binom{0}{0}$ $LBD = -\infty$ $f(x^0) = UBD = 0$ $\varepsilon = 0{,}1$

1: $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 2x_2 + 6x_1 - 3{,}5 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$ $\nabla f(x^0) = \binom{-3{,}5}{0}$

$z(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - \underbrace{x^k}_{\binom{0}{0}}) = 0 + (-3{,}5; 0)\binom{x_1}{x_2} = -3{,}5x_1$

Grafisk: $\min z = -3{,}5x_1$ $\quad y^0 = \binom{1}{0}, z^* = -3{,}5$

$LBD = \{LBD, -3{,}5\} = -3{,}5$

Avbrottskriteriet: $UBD - LBD = 0 - (-3{,}5) = 3{,}5 > \varepsilon = 0{,}1$ Fortsätt!

2: Definiera sökriktning $d^{(k)} = y^k - x^k$ $\quad d^0 = y^0 - x^0 = \binom{1}{0} - \binom{0}{0} = \binom{1}{0}$

sätt $x^{k+1}(t) = x^k + td^k$ $\quad x^1 = x^0 + td^0 = \binom{0}{0}$

3: Linjesökning mellan x^k & y^k sätt in $x^k + td^k$ i $f(x)$ & derivera

$f(t) = t^4 + 3t^2 - 3{,}5t$ $\quad f'(t) = 4t^3 + 6t - 3{,}5$ $\quad t \in [0,1]$ Intervallhalvering!

- Ändpunkterna: $f'(0) = \underbrace{-3{,}5}_{<0}$ $f'(1) = \underbrace{6{,}5}_{>0} \Rightarrow$ minimum som ligger i intervallet
- Testa mittpunkten: $m_k = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad f'(1/2) = 4\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{2} - 3{,}5 = 0$

minimum till $f(t)$ fås för $t = 0{,}5$ $\quad x^1 = \binom{0{,}5}{0}$

4. Ta ut x^{k+1} & räkna ut $f(x^{k+1})$ = nya UBD

$f(x^1) = f\binom{0{,}5}{0} = (0{,}5)^4 + 0^2 - 2\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}5^3 - 3{,}5\cdot 0{,}5 = -\frac{15}{6}$ Pessimistisk skattning av $f(x^*)$

Avbrottskriteriet: $UBD - LBD = -\frac{15}{6} - (-3{,}5) \not< \varepsilon = 0{,}1$ Fortsätt!

5. $k := k+1$ & gå till steg 1 SLUTSATS Ex: Efter en iteration kan vi se

$f(x)$: Pessimistiska skattning bättre varje iteration $z(y)$: Optimistiska skattningen nödvändigtvis inte bättre	$-\frac{7}{2} \le f(x^*) \le -\frac{15}{16}$