Föreläsning 7

TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Nätverksoptimering

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Finns många typer!

Vi ska studera:

- billigaste (kortaste) väg
- minimalträd

Nätverk:

noder: (i) nod i

bågar < riktade : $(i) \longrightarrow (j)$ båge (i,j)
bågar < oriktade $(i) \text{———} (j)$ båge $(i,j) \Leftrightarrow (j,i)$

Billigaste väg

Givet:

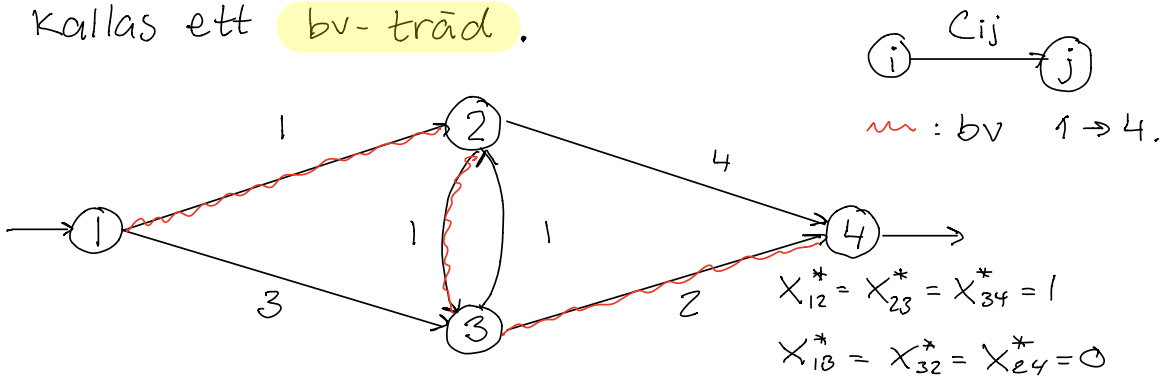
Ett riktat nätverk med m noder med kostnader på bågarna

Sökt:

En billigaste väg (bv) från nod 1 till nod m.

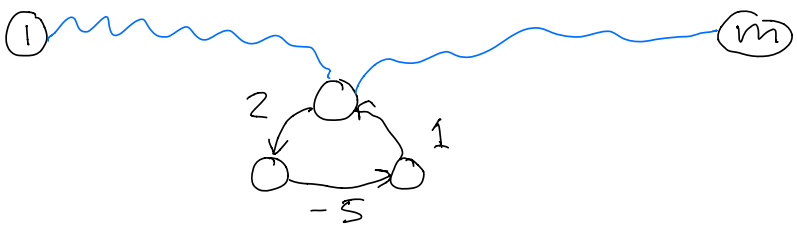
Ibland:

Sökes bv från nod 1 till alla andra noder.
Kallas ett bv-träd.



När är problemet välställt?

- Det finns minst en väg från nod 1 till nod m (tillåten lösning finns)
- Det finns ingen cykel med negativ kostnad (begränsat optimum)



nettokostnad = -2, obegränsat optimum

Formulering:

Variabler:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om bäge } (i,j) \text{ ingår i vägen} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Modell:

$$\min z = x_{12} + 3x_{13} + x_{23} + 4x_{24} + x_{32} + 2x_{34}$$

då

en bäge ut → $x_{12} + x_{13} = 1$

$x_{23} + x_{24} = x_{12} + x_{32}$

$x_{32} + x_{34} = x_{13} + x_{23}$

en bäge in → $x_{24} + x_{34} = 1$

$x_{ij} = 0/1, \ \forall i,j$

Om vägen passerar nod 2: VL = HL = 1

Om vägen inte passerar nod 2: VL = HL = 0

$$\Leftrightarrow \min z = (1, 3, 1, 4, 1, 2)x$$

då

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{nod:} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

bäge: (1,2) (1,3) (2,3) (2,4) (3,2) (3,4)

$1 \geq x_{ij} \geq 0$ och heltal, $\forall ij$

Bivillkoren beskrivning av en anslutningsmatris:

- en rad per nod
- en kolumn per bäge
- $a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{om bäge } k \text{ startar i nod } i \\ -1 & \text{om bäge } k \text{ slutar i nod } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Generellt:

$$\min z = c^T x$$

då $Ax = b$

$1 \geq x \geq 0$ och heltalig

där A är en anslutningsmatris och

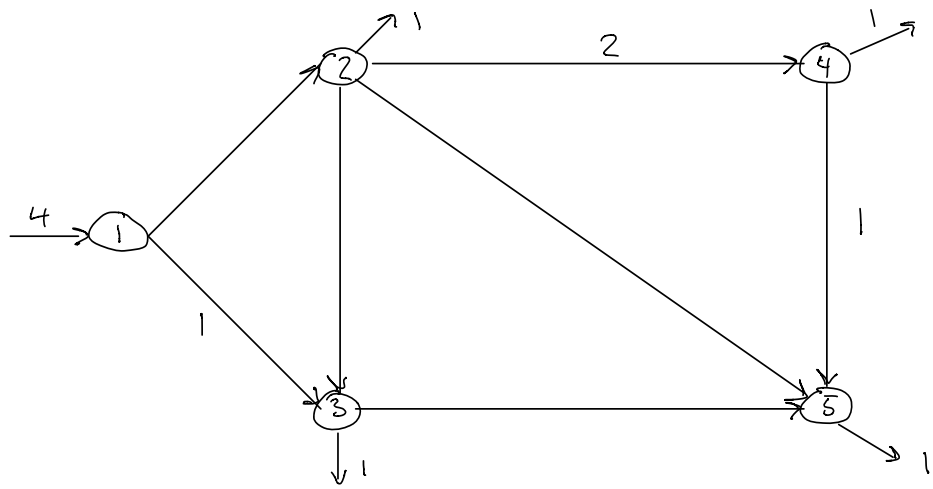
$$b = (1, 0, \ldots, 0, -1)^T$$

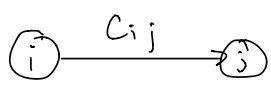
Om ett bv-träd söks?

$b = (m-1, -1, -1, \dots, -1)^T$

$x_{ij} \geq 0$ och heltaliga

x_{ij} = flöde på båge (i,j)





Def:

En matris är fullständig unimodulär om alla kvadratiska delmatriser har determinanter som är $0, \pm 1$.

Obs:

alla matriselement måste därför vara $0, \pm 1$.

SATS:

Varje anslutningsmatris är fullständigt unimodulär.

Komplikation:

Raderna i anslutningsmatrisen A är linjärt beroende, ty rad-summa $= 0$. Man kan visa att $\text{rang}(A) = m-1$, varför exakt ett villkor är onödigt och kan strykas. Stryk tex det första.

Då fås $\bar{A}x = \bar{b}$ där $\bar{A}$ innehåller $m-1$ rader och

$$\bar{b} = (0, \dots, 0, -1)^T$$

Vi är på väg mot baslösningar och då behövs linjärt oberoende.

SATS:

Varje tillåten baslösning, hörnpunkt, till

$$\min z = c^T x$$
$$\text{då} \quad \bar{A}x = \bar{b}$$
$$x \geq 0$$

är 0/1-värd.

OBS!

LP-problem.

Cramers regel:

$$x_j = \frac{\det B^j}{\det B}, \quad j = 1, \dots, m-1$$

$$B^j = (\bar{A}, \dots, \bar{A}_{j-1}, \bar{b}, \bar{A}_{j+1}, \dots, \bar{A}_{m-1})$$
$$\bar{b} = (0, 0, \dots, -1)^T$$

så då fås

$$\det B^j = \pm \det(\text{kvadratisk delmatris av } A) = 0, \pm 1$$

Av det följer att

$x_j = 0/1$, $j = 1, \dots, m-1$, eftersom baslösning tillåten.

Följdsats:

En optimal tillåten baslösning är 0/1-värd och löser därför 0/1-problemet.
Kallas heltalsegenskap.

Slutsats:

BV-problemet är ett 0/1-problem, men kan lösas som ett LP-problem!
Optimalitetsvillkor?
Utnyttja LP-dualitet

Ex: igen

$$\min z = (1, 3, 1, 4, 1, 2)x$$

då

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nod:	dualvariabler
1	y_1
2	y_2
3	y_3
4	y_4

bäge: (1,2) (1,3) (2,3) (2,4) (3,2) (3,4)

$\cancel{1 \geq}\ x_{ij} \geq 0$ och heltal, $\forall ij$

Dual:

$$\max z = y_1 - y_4$$

då

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \leq 1 & x_{12} \\ y_1 - y_3 \leq 3 & x_{13} \\ y_2 - y_3 \leq 1 & x_{23} \\ y_2 - y_4 \leq 4 & x_{24} \\ y_3 - y_2 \leq 1 & x_{32} \\ y_3 - y_4 \leq 2 & x_{34} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ $\max w = y_4 - y_1$

byt y_i mot $-y_i$

då

$$\begin{cases} y_2 - y_1 \leq 1 & (1) \\ y_3 - y_1 \leq 3 & (2) \\ y_3 - y_2 \leq 1 & (3) \\ y_4 - y_2 \leq 4 & \Rightarrow y_4 \leq 4 + y_2 \\ y_2 - y_3 \leq 1 & (5) \\ y_4 - y_3 \leq 2 & \Rightarrow y_4 \leq y_3 + 2 \end{cases}$$

$\max y_4 \rightarrow y_4 = \min\{y_2 + 4, y_3 + 2\}$

(1) och (5) ger

$$\max y_2 \Rightarrow y_2 = \min\{y_1 + 1, y_3 + 1\}$$

(2) och (3) ger

$$\max y_3 \Rightarrow y_3 = \min\{y_1 + 3, y_2 + 1\}$$

Välj $y_1 = 0$,
ekvivalent med att villkoret för nod 1 stryks.