Föreläsning 6

TANA21 – Beräkningsmatematik

Derivering
Integrering

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Antag att vi känner $f(x-h)$, $f(x)$ och $f(x+h)$ och söker $f'(x)$, x är en given punkt.

Differenskvoter

$$f'(x) \approx D_+ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{Framåtdiff}$$

$$D_- f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad \text{Bakåtdiff}$$

$$D_0 f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad \text{Centraldiff / Symm. diff. kvot.}$$

Är alla lika bra?

Undersök med Taylors formel

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \quad \text{se formelsaml.}$$

$$D_+ f(x) = \frac{1}{h}\left(\cancel{f(x)} + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots - \cancel{f(x)} \right) =$$

$$= f'(x) + h \cdot \underbrace{\frac{f''(x)}{2!} + \dots}_{c_1} = f'(x) + O(h^1)$$

trunkeringsfelet är $D_+ f(x) - f'(x) = O(h^1)$

Noggrannhetsordningen är 1, gäller även för $D_- f(x)$.

$$D_0 f(x) = \frac{1}{2h}\Big(\cancel{f(x)} + h \cdot f'(x) + \cancel{\frac{h^2}{2!} f''(x)} + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$- \big(\cancel{f(x)} - h f'(x) + \cancel{\frac{h^2}{} f''(x)} - \frac{h^3}{} f'''(x) + \dots \big)\Big) =$$

$$= f'(x) + \frac{1}{2h}\left(\frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \frac{2h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots \right) =$$

$$= f'(x) + h^2 \underbrace{\frac{f'''(x)}{3!}}_{c_1} + h^4 \underbrace{\frac{f^{(5)}(x)}{5!}}_{c_2} + \dots = f'(x) + O(h^2)$$

Noggrannhetsordningen är 2, dvs mindre trunkeringsfel. Även om $h > 0$.

$D_0 f(x)$ bör användas men ej möjligt om x är första/sista tabellpunkt.

Ex:

x	0,95	1	1.05
$f(x)$	0,423	0,500	0,579

← korrekt avrundade.

Approximera $f'(1) \approx D_0 f(1) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$ $h = 0.05$

$$f'(1) \approx \frac{0.579 - 0.423}{2 \cdot 0{,}05} = 1.56$$

Hur påverkar avrundningen av f?

$D_0 f(1)$ är på formen $z = \frac{a-b}{2h}$, antag

$|\Delta a| \leq \varepsilon$ och $|\Delta b| \leq \varepsilon$

$\varepsilon \leq 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

Maximalfeluppskattning ger

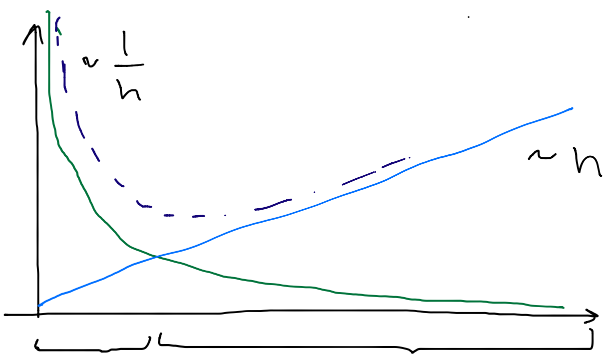
$$|\Delta z| \leq \left|\frac{\partial z}{\partial a} \Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial b} \Delta b\right| \leq \frac{1}{2h} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2h} \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{h}$$

$|\Delta z| \lessapprox \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{0.05} = 0.01$

felet växer då h minskar!

Hur noggrant?

$f'(x) - D_0 f(x)$



Avrundningsfel i flyttalssystem begränsar.
Kancellation!

Approximera $f''(x)$

$$D_+(D_- f(x)) = D_+\left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right) =$$

$$= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Kontroll: Taylor ger

$$D_+ D_- f(x) = f''(x) + c_1 \cdot h^2 + c_2 h^4 + \dots$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{R_T}$

Integration

Beräkna $I = \int_a^b f(x)\,dx$ där $f(x)$ inte kan integreras eller är känd som tabell:

x	x_0	x_1	....	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	....	f_n

där $x_{i+1} - x_i = h$

möjligheter: integrera (i) $f^*(x)$ från approximation

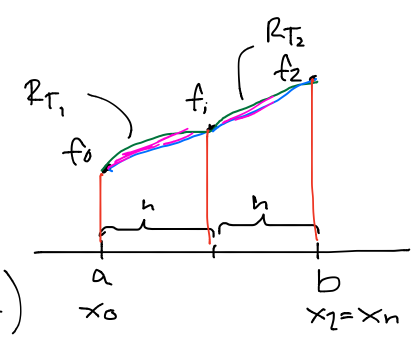
(ii) spline

(iii) interpolerat polynom

Kvadraturformler

polynom, grad	
0	mittpunktsregeln (se fs sid 7)
1	trapetsregeln
2	Simsons formel

Trapetsregeln



$$h = \frac{b-a}{n}$$

ytan: $h \cdot \frac{f_0+f_1}{2} + h \cdot \frac{f_1+f_2}{2} = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \frac{f_2}{2}\right)$

allmänt:

$$T(n) = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right)$$

På varje delintervall fås ett trunkeringsfel $R_{T_i}(h)$

$$|R_{T_i}(h)| = \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-p_1(x))\,dx\right| = \{\text{sats } 5.2.2\} =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\frac{|f''(\xi)|}{2!}}_{\text{konst.}} \underbrace{|(x-x_i)|}_{h/2\ (\max)}\underbrace{(x-x_{i+1})}_{h/2}\,dx \le \int c_i \cdot h^2\,dx = \left[c_i h^2 \cdot x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= c_i h^2 \cdot h$$

$$|R_T| = \sum |R_{T_i}(h)| \le \sum c_i h^3 \le \{\text{anta } c_i \le c\} \le$$

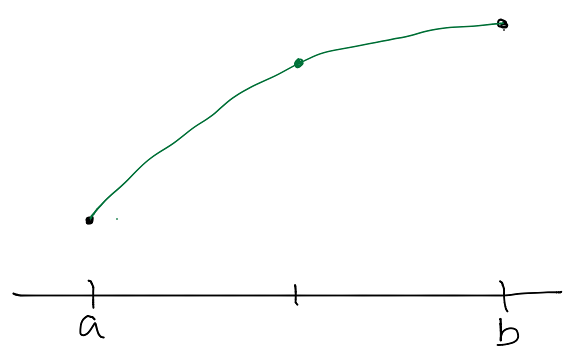
$$\le n \cdot c \cdot h^3 = \{n \cdot h = (b-a)\} = (b-a)\cdot c \cdot h^2$$

Man kan visa att $R_T = -\frac{(b-a)}{12}\cdot f''(\xi)\cdot h^2 \quad a \le \xi \le b$

eller $R_T = c_2 h^2 + c_4 h^4 + \dots$

Simpsons formel

Två delintervall: integrera andragradspolynom.



ger:

$$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

h jämnt.

Man kan visa att $R_T = -\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) \cdot h^4$

Test av noggrannhetsordning, p.

Rätt värde antas känt (eller approx. med god noggrannhet). Antag $R_T(h) = C_p h^p + C_{p+1} \cdot h^{p+1} + \dots$

För små h är $R_T(h) \approx C_p \cdot h^p$ så

$$\frac{R_T(2h)}{R_T(h)} \approx \frac{C_p (2h)^p}{C_p h^p} = 2^p \quad (p \text{ heltal})$$

Ex:

$f(x) = e^x$ ger $f'(0) = 1$

h	$D_0 f(0)$	|fel|	felkvot
0.1	1,0517...	0.0517	
			2.034
0.05	1,0254...	0.0254	
			2.017
0.025	1.0126...	0.0126	
			↓
			2^1

Verkar som $p=1$ istället för 2

$\Rightarrow$ fel i koden?

Om rätt värde är känt:

Låt $F(h) = D_0 f(0)$

$$F(h) = \underbrace{C_0}_{\text{okänt}} + C_p h^p + C_{p+1} h^{p+1} + \dots \approx C_0 + C_p h^p$$

rätt värde

$$\frac{F(4h)-F(2h)}{F(2h)-F(h)} \approx \frac{C_0 + C_p(4h)^p - (C_0 + C_p(2h)^p)}{C_0 + C_p(2h)^p - (C_0 + C_p \cdot h^p)} = 2^p.$$