**Härled utgående från hastighetssambandet för en stel kropp, d.v.s. $\overline{\boldsymbol{v}_B} = \overline{\boldsymbol{v}_A} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\boldsymbol{AB}}$ motsvarande samband för accelerationer: $\overline{\boldsymbol{a}_B} = \overline{\boldsymbol{a}_A} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \times (\overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\boldsymbol{AB}}) + \overline{\boldsymbol{\alpha}} \times \overline{\boldsymbol{AB}}$. Tolka termerna i uttrycket för specialfallet plan rörelse där punkten A fix är i såväl kropp som rum.**

$$\overline{\boldsymbol{v}_B} = \overline{\boldsymbol{v}_A} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\boldsymbol{AB}} \Leftrightarrow$$

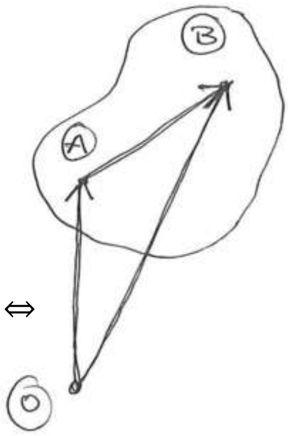
$$\Leftrightarrow \dot{\overline{\boldsymbol{v}_B}} = \dot{\overline{\boldsymbol{v}_A}} + (\dot{\overline{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\dot{\overline{\boldsymbol{v}_A}} = \overline{\boldsymbol{a}_A}, \qquad \dot{\overline{\boldsymbol{v}_B}} = \overline{\boldsymbol{a}_B}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a}_B} = \overline{\boldsymbol{a}_A} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\overline{\boldsymbol{AB}}} + \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}}} \times \overline{\boldsymbol{AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\overline{\boldsymbol{AB}} \textbf{ fix i kroppen} \Rightarrow \dot{\overline{\boldsymbol{AB}}} = \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\boldsymbol{AB}}, \qquad \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}}} = \overline{\boldsymbol{\alpha}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a}_B} = \overline{\boldsymbol{a}_A} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \times (\overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{\boldsymbol{AB}}) + \overline{\boldsymbol{\alpha}} \times \overline{\boldsymbol{AB}}. \quad \textbf{VSV.}$$




$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$

*Tidsderivering* $\Rightarrow$

$\dot{\overline{OB}} = \dot{\overline{OA}} + \dot{\overline{AB}}$

$\overline{V_B} \quad \overline{V_A} \quad x$

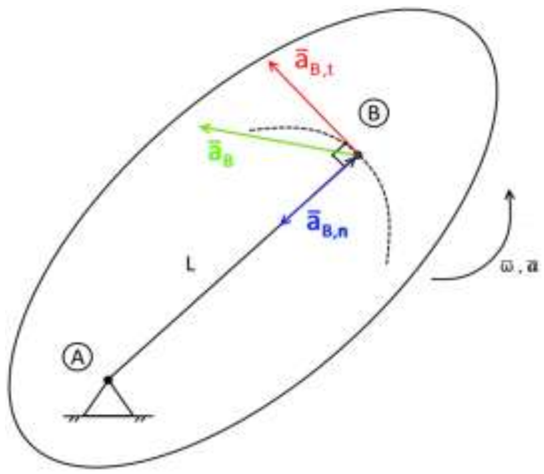
*Jämför med:*

$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{\omega} \times \overline{AB}$

$\Rightarrow$

$\dot{\overline{AB}} = \overline{\omega} \times \overline{AB}$

**Om plan rörelse kring punkt A som är fix i kropp och rum $\Rightarrow$ A är fix axel.**




$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) + \bar{\alpha} \times \overline{AB}$$

A är fix axel $\Rightarrow \overline{a_A} = \bar{0}$.

$$\overline{a_B} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) + \bar{\alpha} \times \overline{AB}$$

Jämför med:

$$\overline{a_B} = \bar{a}_{B,n} + \bar{a}_{B,t}$$

Där $\bar{a}_{B,n}$ är riktad in mot A och $\bar{a}_{B,t} \perp \overline{AB}$.

**"Karusellekvationerna"**

$a_n$:

$$a_{B,n} = |\bar{a}_{B,n}| = |\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB})| = \left[|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta\right] = |\bar{\omega}||\bar{\omega} \times \overline{AB}| \sin\theta =$$

$$= |\bar{\omega}||\bar{\omega}||\overline{AB}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 = [\theta_1 \text{ och } \theta_2 = 90° \text{ ty } \bar{\omega} \perp \overline{AB} \text{ och } \bar{\omega} \perp (\bar{\omega} \times \overline{AB})] =$$

$$= |\bar{\omega}||\bar{\omega}||\overline{AB}| = \omega^2 L$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = a_{B,n} = \boldsymbol{\omega^2 L}$$

**OBS:** $v_B = \omega L$, vilket medför följande:

$$a_n = \omega^2 L = v_B \omega$$

$a_t$:

$$a_{B,t} = |\bar{a}_{B,t}| = |\bar{\alpha} \times \overline{AB}| = \left[|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta\right] = |\bar{\alpha}||\overline{AB}| \sin\theta =$$

$$= [\theta = 90° \text{ ty } \bar{\alpha} \perp \overline{AB}] = |\bar{\alpha}||\overline{AB}| = \alpha L$$

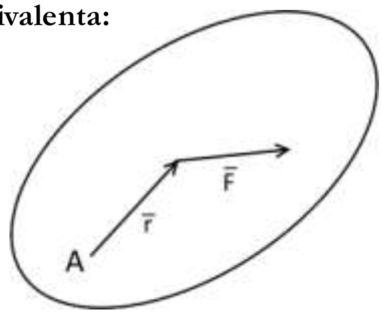
$$\therefore \boldsymbol{a_t} = a_{B,t} = \boldsymbol{\alpha L}$$

## 2.

**I mekaniken förekommer moment i tre betydelser som inte är ekvivalenta:**

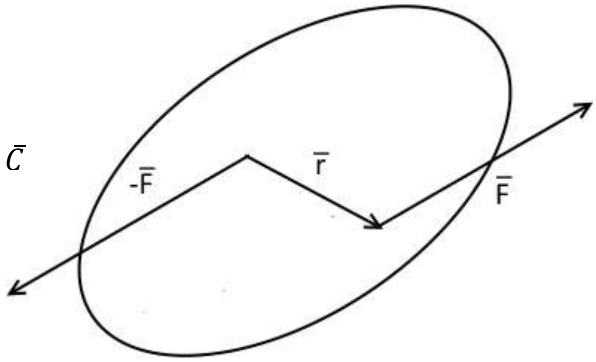
i. <u>Kraftmoment $\bar{M}$</u>

$$\bar{M}_A = \bar{r} \times \bar{F}$$



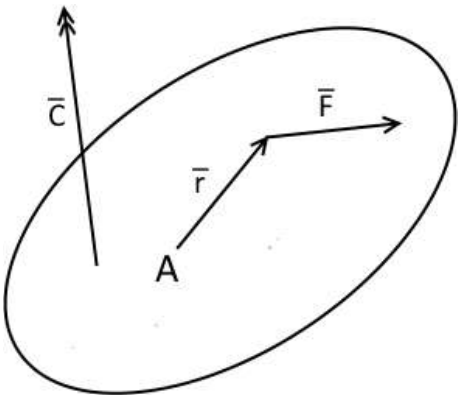

ii. <u>Kraftparsmoment $\bar{C}$</u>

$\bar{C}$ har endast en *vridande* verkan (ingen *translaterande* verkan). Dess verkan kan ersättas av två lika stora och motriktade krafter, därav namnet kraftparsmoment (par av krafter som ger upphov till moment).




iii. <u>Momentsumma</u> (d.v.s. vänsterledet i Eulers II:a: $\sum \bar{M}$)

$$\sum \bar{M}_A = \bar{r} \times \bar{F} + \bar{C}$$




## 3.

**Låt $\bar{s}$ vara en vektor som utgår från en stel kropps masscentrum. Visa att då gäller $\int_\Omega \bar{s}\, dm = \bar{0}$**

G:s läge ges av

$$\bar{r}_G = \frac{\int_\Omega \bar{r}\, dm}{\int_\Omega dm}.$$

Med

$$\bar{r} = \bar{r}_G + \bar{s}$$

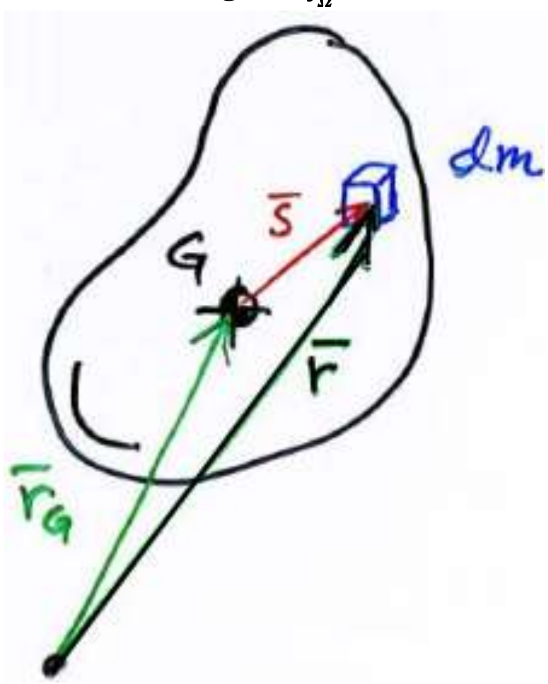
Fås

$$\bar{r}_G = \frac{\int_\Omega (\bar{r}_G + \bar{s})\, dm}{\int_\Omega dm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \bar{r}_G\, dm = \int_\Omega (\bar{r}_G + \bar{s})\, dm \Leftrightarrow$$

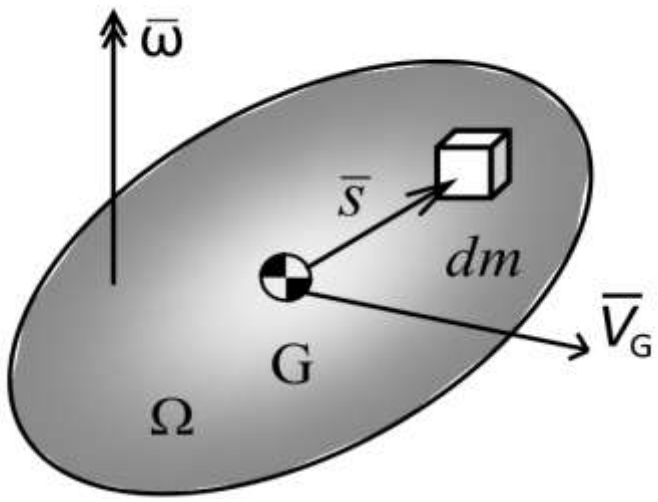
$$\Leftrightarrow \int_\Omega \bar{r}_G\, dm = \int_\Omega \bar{r}_G\, dm + \int_\Omega \bar{s}\, dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \bar{s}\, dm = \bar{0}. \quad \text{VSV.}$$



# 4.

**Den allmänna definitionen av en kropps rörelsemängd är $\bar{\boldsymbol{G}} = \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{v}}\ \boldsymbol{dm}$. Visa utgående från detta, att det för en stel kropp gäller att $\bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{m}\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{G}}$.**




$$\bar{G} = \int_{\Omega} \bar{v}\ dm \Leftrightarrow [\bar{v} = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{G} = \int_{\Omega} (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s})\ dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{G} = \int_{\Omega} \bar{v}_G\ dm + \int_{\Omega} (\bar{\omega} \times \bar{s})\ dm \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ [$\bar{v}_G$ och $\bar{\omega}$ varierar ej över kroppen $\Omega$ (så de kan betraktas som konstanta)] $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{G} = \bar{v}_G \int_{\Omega} dm + \bar{\omega} \times \int_{\Omega} \bar{s}\ dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\int_{\Omega} \bar{s}\, dm = \bar{0} \text{ från definitionen av masscentrum,} \qquad \text{samt} \int_{\Omega} dm = m\right] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \bar{G} = m\bar{v}_G$. VSV.

# 5.

**Enligt den allmänna definitionen kan rörelsemängdsmomentet med avseende på masscentrum för en kropp skrivas: $\bar{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{G}} = \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{s}} \times \bar{\boldsymbol{v}}\ \boldsymbol{dm}$. Visa utgående från detta, att det för en stel kropp gäller att $\bar{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{G}} = \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{s}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{s}})\ \boldsymbol{dm}$ där $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ är kroppens vinkelhastighet.**

$$\bar{H}_G = \int_{\Omega} \bar{s} \times \bar{v}\ dm \Leftrightarrow [\bar{v} = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s} \text{ ,ty stel kropp}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_{\Omega} \bar{s} \times (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s})\, dm \Leftrightarrow$$

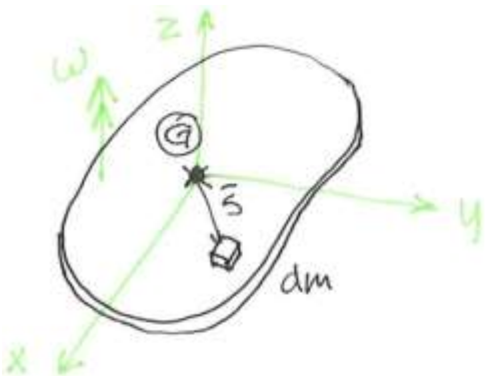
$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_{\Omega} \bar{s}\, dm \times \bar{v}_G + \int_{\Omega} \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\int_{\Omega} \bar{s}\, dm = \bar{0} \text{ från definitionen av masscentrum} \Rightarrow \int_{\Omega} \bar{s}\, dm \times \bar{v}_G = \bar{0}\right] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_{\Omega} \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm$. VSV.

## 6.

**Visa att $\bar{\boldsymbol{H}}_G = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{s}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{s}})\ \boldsymbol{dm}$ kan skrivas på formen $\bar{\boldsymbol{H}}_G = \boldsymbol{I}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}$ vid plan rörelse hos en plan kropp och identifiera det erhållna uttrycket för $\boldsymbol{I}_G$.**




$$\bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\ dm \Leftrightarrow \left[\bar{s} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}, \bar{\omega} = \omega\bar{k}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_\Omega (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}) \times \left[\omega\bar{k} \times (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k})\right] dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_\Omega (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}) \times (-\omega y\bar{\imath} + \omega x\bar{\jmath})\, dm$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_\Omega \omega\left[-xz\bar{\imath} - yz\bar{\jmath} + (x^2 + y^2)\bar{k}\right] dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{konstant densitet } \rho \text{ samt plan kropp symmetrisk kring } z = 0 \\ \Rightarrow \int_\Omega xz\,\mathrm{dm} = \int_\Omega yz\,\mathrm{dm} = 0, \\ \text{ty t.ex. } \int_\Omega xz\,\mathrm{dm} = \int_\Omega xz\,\rho\,\mathrm{dxdydz} = \int_\Omega x\,\rho\,\mathrm{dxdy} \int_{-a}^{a} z\,\mathrm{dz} = \int_\Omega x\,\rho\,\mathrm{dxdy} \cdot 0 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

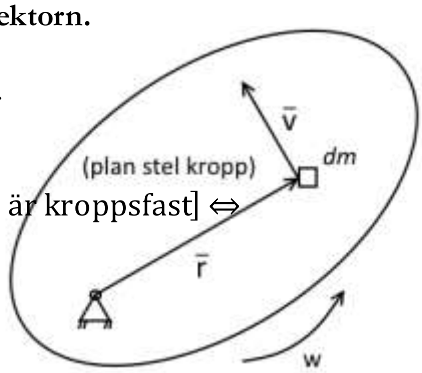
$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = \int_\Omega \omega(x^2 + y^2)\bar{k}\, dm \Leftrightarrow \bar{H}_G = \omega\bar{k} \int_\Omega (x^2 + y^2) dm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[I_G = \int_\Omega (x^2 + y^2)\ dm, \text{kroppens masströghetsmoment m. a. p. } G \text{ kring } z - \text{axeln}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_G = I_G \bar{\omega}. \quad \text{VSV.}$$

## 7.

**Rörelsemängdsmomentet m.a.p. en godtycklig punkt definieras som bekant $\bar{\boldsymbol{H}}_A = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}}\ \boldsymbol{dm}$. Låt O vara en punkt som är fix i såväl kropp som rum. Visa, utgående från definitionen, att det för en plan stel kropp i plan rörelse gäller att $\bar{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{I}_O \bar{\boldsymbol{\omega}}$, där $\boldsymbol{I}_O$ är kroppens masströghetsmoment m.a.p. O och $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ är vinkelhastighetsvektorn.**




$$\bar{H}_A = \int_\Omega \bar{r} \times \bar{v}\ dm \Leftrightarrow [\text{A är en godtycklig punkt, kan ersättas av O}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_O = \int_\Omega \bar{r} \times \bar{v}\ dm \Leftrightarrow [\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}\text{, ty stel kropp. } \bar{v}_O = 0\text{, ty O är kroppsfast}] \Leftrightarrow$$

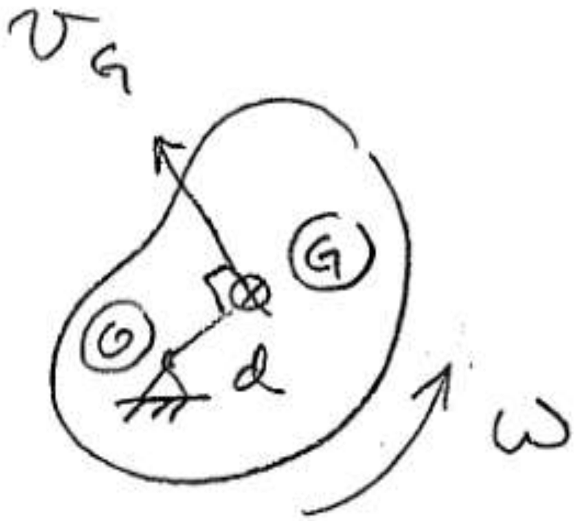
$$\Leftrightarrow \bar{H}_O = \int_\Omega \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\ dm \Leftrightarrow \left[\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_O = \int_\Omega \bar{\omega}(\bar{r} \cdot \bar{r}) - \bar{r}(\bar{r} \cdot \bar{\omega})\, dm \Leftrightarrow [\bar{r} \cdot \bar{\omega} = 0 \text{ ty plan rörelse} \Rightarrow \bar{r} \text{ i planet och } \bar{r} \perp \bar{\omega}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}_O = \int_\Omega \bar{\omega} r^2\, dm \Leftrightarrow \bar{H}_O = \bar{\omega} \int_\Omega r^2\, dm \Leftrightarrow \left[\int_\Omega |\bar{r}|^2\, dm = \int_\Omega r^2\, dm = I_o\right] \Leftrightarrow \bar{H}_O = I_o \bar{\omega}. \quad \text{VSV.}$$

## 8.

**Visa att rörelsemängdsmomentet kan tecknas $\boldsymbol{H_O = I_O \omega}$ om O är en kroppsfast punkt som är fix i rummet. Utgå från förflyttningssatsen för rörelsemängdsmoment i det plana fallet: $\boldsymbol{H_A = I_G \omega \pm m v_G d_\perp}$.**




Eftersom A är en godtycklig punkt:

$H_O = I_G \omega + m v_G d_\perp$.

Plan kropp och O kroppsfast samt fix i rummet $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ fixaxelrotation $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \; v_G = \omega d \Longrightarrow$

$\Longrightarrow H_O = I_G \omega + m\omega d d =$

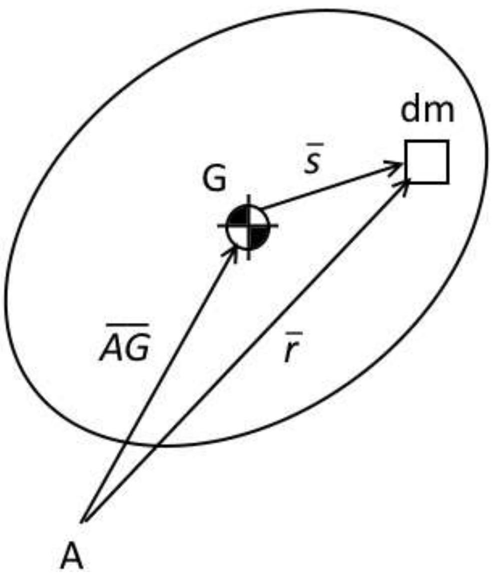
$\Leftrightarrow H_O = (I_G + md^2)\omega =$

$\Leftrightarrow$ [Steiners sats: $I_O = I_G + md^2$] $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H_O = I_O \omega$. VSV.

## 9.

**Utgå från definitionen av masströghetsmoment och bevisa förflyttningssatsen för masströghetsmoment (Steiners sats) för en plan kropp, d.v.s. $\boldsymbol{I_A = I_G + m|\overline{AG}|^2}$, där $\boldsymbol{I}$ betecknar masströghetsmoment kring axlar som är vinkelräta mot kroppen, $|\overline{\boldsymbol{AG}}|$ betecknar avståndet mellan en godtycklig punkt A och masscentrum G och $m$ är kroppens massa.**




$$I_A = \int_\Omega |\bar{r}|^2 \, dm = \int_\Omega \bar{r} \cdot \bar{r} \, dm =$$

$$= [\bar{r} = \overline{AG} + \bar{s}] =$$

$$= \int_\Omega (\overline{AG} + \bar{s}) \cdot (\overline{AG} + \bar{s}) \, dm =$$

$$= \int_\Omega (|\overline{AG}|^2 + 2(\overline{AG} \cdot \bar{s}) + |\bar{s}|^2) \, dm =$$

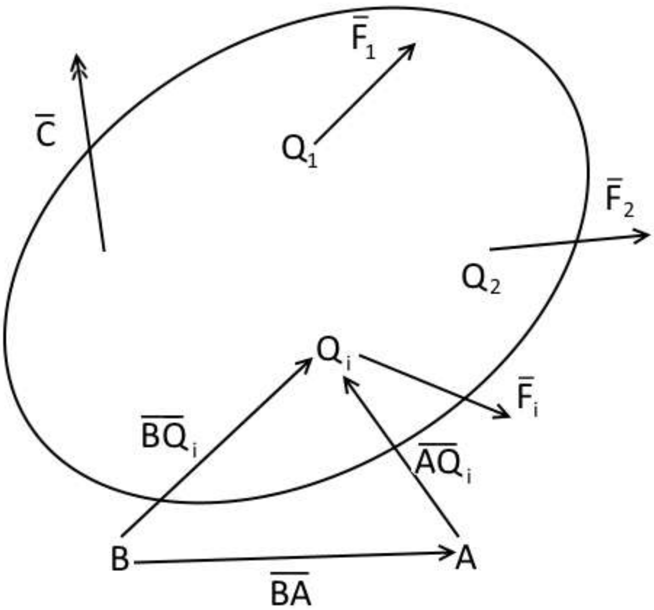
$$= |\overline{AG}|^2 \int_\Omega dm + 2\overline{AG} \cdot \int_\Omega \bar{s} \, dm + \int_\Omega |\bar{s}|^2 \, dm =$$

$$= \left[ \int_\Omega dm = m, \qquad \int_\Omega \bar{s} \, dm = \bar{0}, \qquad \int_\Omega |\bar{s}|^2 \, dm = I_G \right] =$$

$$= m|\overline{AG}|^2 + I_G = I_G + m|\overline{AG}|^2. \quad \text{VSV.}$$

## 10.

**Visa förflyttningssatsen för momentsumma, $\sum \bar{\boldsymbol{M}}_B = \sum \bar{\boldsymbol{M}}_A + \overline{\boldsymbol{BA}} \times \sum \bar{\boldsymbol{F}}$, där A och B är två godtyckliga punkter.**




$$\sum \bar{M}_B = \sum_i \overline{BQ_i} \times \bar{F}_i + \bar{C} =$$

$$= \left[\text{jämf. med} \sum \bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} + \bar{C}\right] =$$

$$= [\text{enl. figur är } \overline{BQ_i} = \overline{BA} + \overline{AQ_i}] =$$

$$= \sum_i (\overline{BA} + \overline{AQ_i}) \times \bar{F}_i + \bar{C} =$$

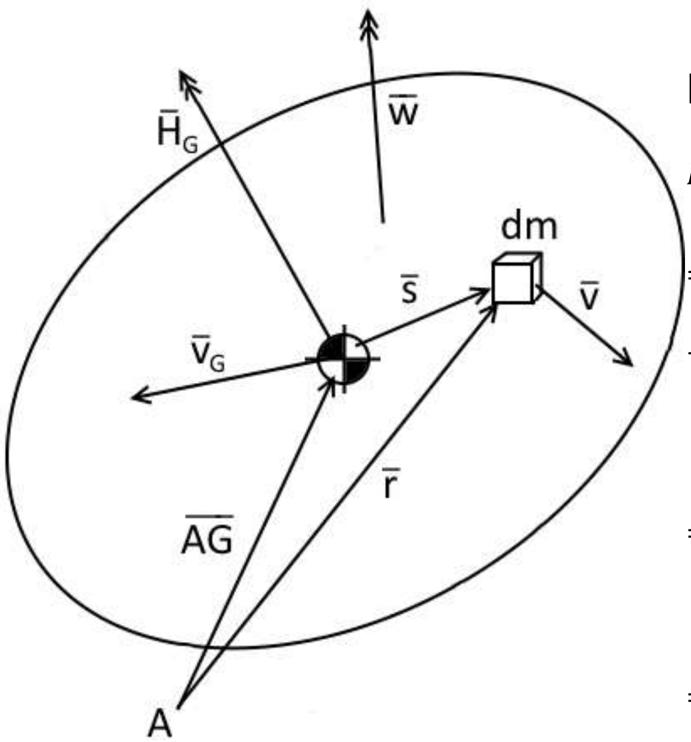
$$= \sum_i \overline{BA} \times \bar{F}_i + \sum_i \overline{AQ_i} \times \bar{F}_i + \bar{C} =$$

$$= \overline{BA} \times \sum \bar{F} + \sum \bar{M}_A =$$

$$= \sum \bar{M}_A + \overline{BA} \times \sum \bar{F}. \quad \text{VSV.}$$

## 11.

**Visa förflyttningssatsen för rörelsemängdsmoment, $\bar{\boldsymbol{H}}_A = \bar{\boldsymbol{H}}_G + \overline{\boldsymbol{AG}} \times \boldsymbol{m}\bar{\boldsymbol{v}}_G$, där A är en godtycklig punkt och G är masscentrum. Utgå från definitionen av rörelsemängdsmoment.**




Enl. def. $\bar{H}_A = \int \bar{r} \times \bar{v}\, dm.$

$[\bar{r} = \overline{AG} + \bar{s}, \qquad \bar{v} = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s}\,]$

$$\bar{H}_A = \int (\overline{AG} + \bar{s}) \times (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s})\, dm =$$

$$= \overline{AG} \times \bar{v}_G \int dm + \overline{AG} \times \left(\bar{\omega} \times \int \bar{s}\, dm\right) +$$

$$+ \int \bar{s}\, dm \times \bar{v}_G + \int \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm =$$

$$= \begin{bmatrix} \int dm = m \\ \int \bar{s}\, dm = \bar{0} \\ \int \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm = H_G \end{bmatrix} =$$

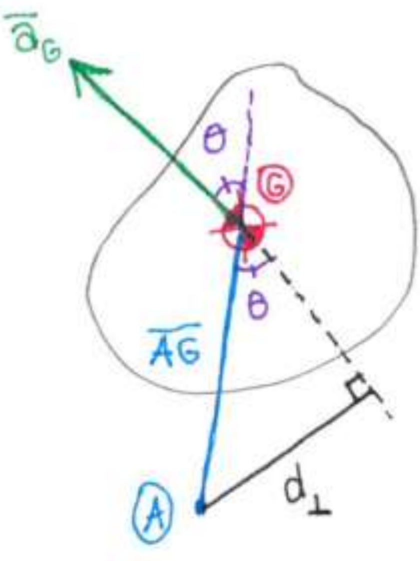
$$= \overline{AG} \times m\bar{v}_G + \bar{0} + \bar{0} + H_G. \quad \text{VSV.}$$

## 12.

**Visa den plana momentlagen $\sum \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{I_G \alpha \pm m a_G d_\perp}$, där A är en godtycklig punkt. Utgå från momentlagen med avseende på masscentrum, d.v.s. $\sum \boldsymbol{\bar{M}_G} = \boldsymbol{\dot{\bar{H}}_G}$.**

Givet att $\sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G$ och $\sum \bar{F} = m\bar{a}_G$.

Dessutom, förflyttningssatsen för momentsumma: $\sum \bar{M}_A = \sum \bar{M}_G + \overline{AG} \times \sum \bar{F}$.




$$\Leftrightarrow \sum \bar{M}_A = \dot{\bar{H}}_G + \overline{AG} \times m\bar{a}_G.$$

I specialfallet plan rörelse $\Longrightarrow$

$H_G = I_G \omega \Longrightarrow \dot{H}_G = I_G \alpha$

Beloppet $|\overline{AG} \times m\bar{a}_G| = m|\bar{a}_G||\overline{AG}|\sin\theta = m a_G d_\perp$.

Så:

$$\sum M_A = \dot{\bar{H}}_G \pm |\overline{AG} \times m\bar{a}_G| \Longrightarrow$$

$$\sum M_A = I_G \alpha \pm m a_G d_\perp \text{ (med } \pm \text{ pga. beloppet). VSV.}$$

## 13.

**Visa, utgående från momentlagen med avseende på en godtycklig punkt, dvs $\sum \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{I_G \alpha \pm m a_G d_\perp}$, att $\sum \boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{I_O \alpha}$, där $\boldsymbol{O}$ är fix i kropp och rum.**

$\sum M_A = I_G \alpha \pm m a_G d_\perp$ och $A = O$ ger tillsammans

$$\sum M_O = I_G \alpha + m a_{G,t} d + m a_{G,n} \cdot 0$$

Karusell-ekvationerna ger att

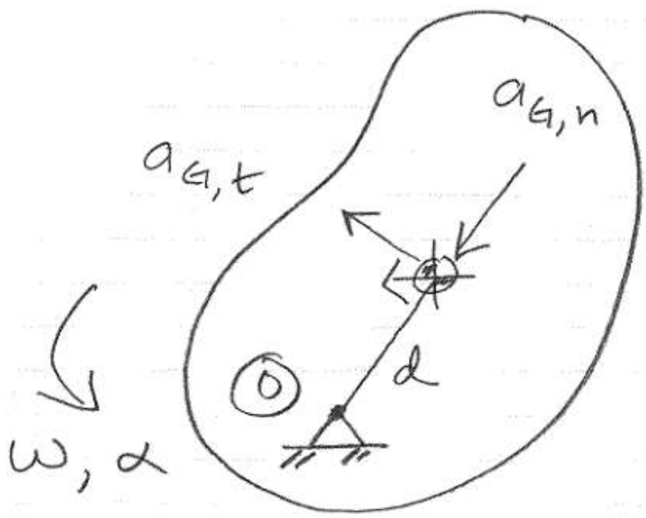
$a_{G,t} = \alpha \cdot d$, så:

$$\sum M_O = I_G \alpha + m(\alpha \cdot d)d =$$

$$= I_G \alpha + m d^2 \alpha = (I_G + m d^2)\alpha$$

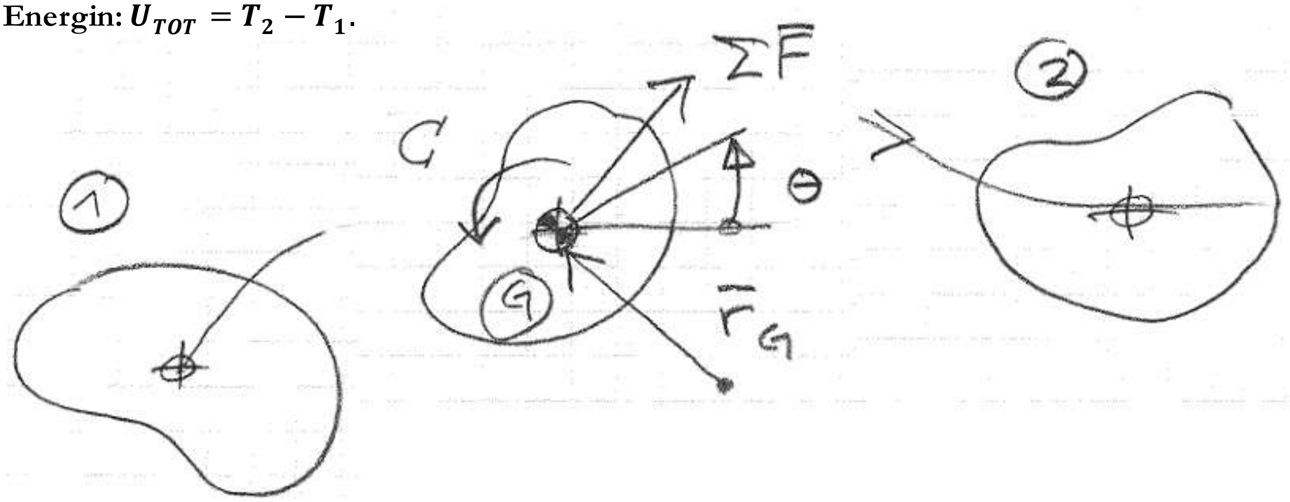
Steiners sats: $I_O = I_G + m|\overline{OG}|^2 = I_G + m d^2$

$$\therefore \sum M_O = I_O \alpha. \text{ VSV.}$$



## 14.

**Utgående från Eulers rörelselagar för en stel kropp i plan rörelse, visa Lagen för Kinetiska Energin: $\boldsymbol{U_{TOT} = T_2 - T_1}$.**




Varje system av krafter kan reduceras till ett kraftparsmoment och en kraftresultant som angriper i G.

Euler I: $\sum \bar{F} = ma_G \Rightarrow \sum \bar{F} = m\ddot{\bar{r}}_G \Rightarrow \bar{F} - m\ddot{\bar{r}}_G = 0$.

Euler II: $\sum M_G = I_G \alpha \Rightarrow C = I_G \ddot{\theta} \Rightarrow C - I_G \ddot{\theta} = 0$.

Skalärmultiplicera I med $d\bar{r}_G$ och II med $d\theta$ och addera dem så fås:

$$\left(\sum \bar{F} - m\ddot{\bar{r}}_G\right) \circ d\bar{r}_G + \left(C - I_G\ddot{\theta}\right) \circ d\theta = 0 \Leftrightarrow \sum \bar{F} \circ d\bar{r}_G + C\, d\theta = m\ddot{\bar{r}}_G \circ \bar{r}_G + I_G \ddot{\theta}\, d\theta.$$

Integrera från läge 1 till läge 2: $\int_1^2 \sum \bar{F} \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 C\, d\theta = \int_1^2 m\ddot{\bar{r}}_G \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 I_G \ddot{\theta}\, d\theta$.

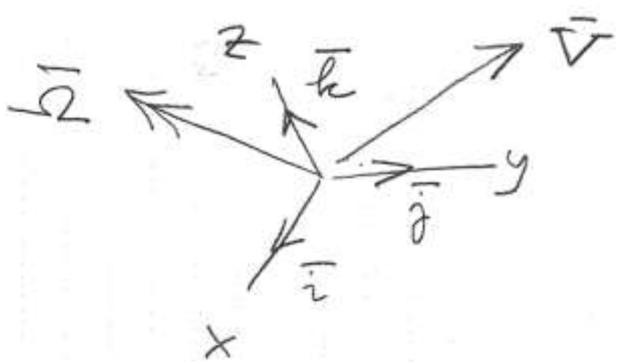
$$U_{TOT} = \int_1^2 m\ddot{\bar{r}}_G \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 I_G \ddot{\theta}\, d\theta = \left[\ddot{\theta}\, d\theta = \dot{\theta}\, d\dot{\theta}, \qquad \ddot{\bar{r}}_G \circ d\bar{r}_G = \frac{d\bar{v}_G}{dt} \circ d\dot{\bar{r}}_G = \bar{v}_G \circ d\bar{v}_G\right] =$$

$$U_{TOT} = m\int_1^2 \bar{v}_G \circ d\bar{v}_G + I_G \int_1^2 \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{1}{2} m [\bar{v}_G \circ \bar{v}_G]_1^2 + \frac{1}{2} I_G \left[\dot{\theta}^2\right]_1^2 =$$

$$= \left[\text{Definition: Kinetisk energi } T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2\right] = T_2 - T_1. \quad \text{VSV.}$$

## 20.

**Ett koordinatsystem med basvektorerna $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ roterar med vinkelhastigheten $\bar{\Omega}$. Härled Coriolis ekvation i 3D ur sambanden $\dot{\bar{\imath}} = \bar{\Omega} \times \bar{\imath}$ etc. (som alltså får anses givna).**




Inför en godtycklig vektor: $\bar{V} = V_x \bar{\imath} + V_y \bar{\jmath} + V_z \bar{k}$.

$\dot{\bar{V}} = [\text{Kedjeregel, ty tidsberoende}] =$

$= \dot{V}_x \bar{\imath} + V_x \dot{\bar{\imath}} + \dot{V}_y \bar{\imath} + V_y \dot{\bar{\imath}} + \dot{V}_z \bar{\imath} + V_z \dot{\bar{\imath}} =$

$= \dot{V}_x \bar{\imath} + \dot{V}_y \bar{\imath} + \dot{V}_z \bar{\imath} + V_x \dot{\bar{\imath}} + V_y \dot{\bar{\imath}} + V_z \dot{\bar{\imath}}$.

Inför beteckning: $\dot{V}_x \bar{\imath} + \dot{V}_y \bar{\imath} + \dot{V}_z \bar{\imath} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{xys}$.

Givna samband: $\dot{\bar{\imath}} = \bar{\Omega} \times \bar{\imath},\ \dot{\bar{\jmath}} = \bar{\Omega} \times \bar{\jmath},\ \dot{\bar{k}} = \bar{\Omega} \times \bar{k} \Longrightarrow$

$V_x\dot{\bar{\imath}} + V_y\dot{\bar{\imath}} + V_z\dot{\bar{\imath}} = V_x(\bar{\Omega} \times \bar{\imath}) + V_y(\bar{\Omega} \times \bar{\jmath}) + V_z(\bar{\Omega} \times \bar{k}) = \bar{\Omega} \times (V_x\bar{\imath} + V_y\bar{\jmath} + V_z\bar{k}) = \bar{\Omega} \times \bar{V}.$

Alltså: $\dot{\bar{V}} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{xys} + \bar{\Omega} \times \bar{V}.$ VSV.

## 15.

**För in potentialerna $V_g$ för tyngdkraften och $V_e$ för fjäderkraften i Lagen för Kinetiska Energin; $U_{TOT} = T_2 - T_1$, och visa att man då får Energiekvationen $U' = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$.**

Varje system av krafter kan reduceras till ett kraftparsmoment och en kraftresultant som angriper i G.

$U_{TOT} = T_2 - T_1 = (\Delta T) \Leftrightarrow U_{TOT} = \int_1^2 \bar{F} \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 C\ d\theta.$

Med $\bar{F} = \bar{F}_e + m\bar{g} + \bar{P}$ fås att $\int_1^2 \bar{F} \circ d\bar{r}_G = \int_1^2 \bar{F}_e \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 m\bar{g} \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 \bar{P} \circ d\bar{r}_G.$

Alltså: $U_{TOT} = \int_1^2 \bar{F}_e \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 m\bar{g} \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 \bar{P} \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 C\ d\theta.$

$\therefore U_{TOT} = V_g + V_e + U'$ där $U' = \int_1^2 \bar{P} \circ d\bar{r}_G + \int_1^2 C\ d\theta$ är övriga krafters påverkan.

$$V_g = \int_1^2 m\bar{g} \circ d\bar{r}_G = [\text{tyngdkraft konservativ} \Rightarrow \text{ej vägberoende,} \quad \text{inför xyz för vektorer}] =$$

$$= \int_1^2 m(-g\bar{e}_z) \circ dz\bar{e}_z = \int_1^2 -mgdz = [2 \text{ motsvarar } h_2, 1 \text{ motsvarar } h_1 \text{ (i } z - led)] =$$

$$= \int_{h_1}^{h_2} -mgdz = -mg(h_2 - h_1) = [V_g = mgh] = -(V_{g,2} - V_{g,1}) = -\Delta V_g.$$

$$V_e = \int_1^2 \bar{F}_e \circ d\bar{r}_G =$$

$$= [\text{fjäderkraft konservativ} \Rightarrow \text{ej vägberoende,} \quad \bar{F}_e = -k\bar{r}, \quad \bar{r} = \text{elongation av fjäder}]$$

$$= \int_1^2 -k\bar{r} \circ d\bar{r}_G = [2 \text{ motsvarar } s_2, 1 \text{ motsvarar } s_1 \text{ (i } \bar{r} - led)] = -\left[\frac{kr^2}{2}\right]_{s_1}^{s_2} = -\left(\frac{ks_2^2}{2} - \frac{ks_1^2}{2}\right) =$$
$$= -(V_{e,2} - V_{e,1}) = -\Delta V_e$$

$$U_{TOT} = V_g + V_e + U' \Leftrightarrow [U_{TOT} = \Delta T, \quad V_g = -\Delta V_g, \quad V_e = -\Delta V_e] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta T + \Delta V_g + V_e = U'. \text{ VSV.}$$