Föreläsning 3

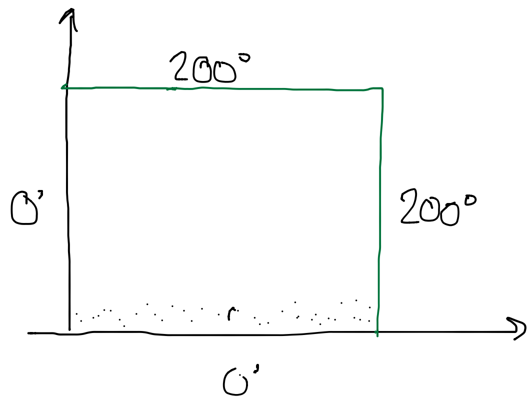
TANA21 – Beräkningsmatematik

Linjära ekvationssystem

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Problem:

Lös $Ax=b$ och $Az=c$ noggrant och effektivt då A är en stor $n\times n$-matris (icke-singulär, entydig lösning).



$10^4 \times 10^4$

$10^5 \times 10^5$

Ex: Lös $Ax=b$ med Gauss-elimination.

pivotelement

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 20 \\ 2 & 0 & 8 & 12 \\ -1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)}_{A \qquad b}$$

behåll (1)

$(2) - \frac{2}{5}(1)$

$(3) - \left(-\frac{1}{5}\right)(1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 20 \\ 0.4 & -2 & 12 & 4 \\ -0.2 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

$(3) - \frac{2}{-2}(2)$

multiplikator.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 20 \\ 0,4 & -2 & 12 & 4 \\ -0,2 & -1 & 15 & 15 \end{array}\right)$$

$=U$

$=L$

bakåtsubstitution.

$x_1 = 2$
$x_2 = 4$
$x_3 = 1$

Ex: Lös $Az=c$, bara högerledet ändras

Utnyttja detta för att bestämma

$A = L\cdot U$ ($L\cdot R$ i boken).

Anteckna multiplikatorerna på nollornas platser. Vi får

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.4 & 1 & \\ -0.2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ & -2 & 12 \\ & & 15 \end{pmatrix}$$

$A=L\cdot U$, hur fungerar det?

Matrisformulering av Gauss-eliminationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.4 & 1 & \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 2 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 0 & -2 & 18 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gausstransformationen

L_1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{L_1\cdot A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$L_1\cdot L_2\cdot A=U$

$$A=(L_2\cdot L_1)^{-1}\cdot U = \underbrace{L_1^{-1}\cdot L_2^{-1}}_{L}\cdot U$$

Den speciella formen på L_1 och L_2 gör de lätta att invertera.

$$L_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.4 & 1 & \end{pmatrix} \qquad L_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$-1 \quad \begin{pmatrix} & & \\ -0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2 \quad \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
byt tecken

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.4 & 1 & \\ -0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.4 & 1 & \\ -0.2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ L och U bildas utan extra beräkningar vid Gauss-elimination.

Vi kan nu lösa $Az = C$ där $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$

$L \cdot U \cdot z = C$

1, Lös $L \cdot y = C$
2, Lös $Uz = y$

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & -5 \\ 0.4 & 1 & & 20 \\ -0.2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right)$

$y_1 = -5$
$y_2 = 20 - 0.4(-5) = 22$
$y_3 = 9 + 0{,}2(-5) + 1 \cdot 22 = 30$

Framåtsubst. (ger $y_1, y_2, \dots, y_n$)

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & -5 \\ & -2 & 12 & 22 \\ & & 15 & 30 \end{array}\right)$

$z_3 = \frac{30}{15} = 2$

$z_2 = \frac{22 - 12 \cdot 2}{-2} = 1$

$z_1 = \frac{-5 + 10 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{5} = 2$

Bakåtsubst (ger $z_n, z_{n+1}, \dots, z_1$)

Detta är effektivt om man har flera högerled.

Aritmetisk komplexitet

A är $n \times n$.

- Bakåtsubst. kräver n^2 beräkningar (aritmetisk operation, a.o). ty

$$\underset{(2n)}{1} + \underset{(2n-1)}{3} + 5 + \underset{(2\cdot 1)}{(2n-1)} = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$$

- Framåtsubst.: $n^2 - n \approx n^2$ a.o
- LU-uppdelning (Gauss-elimination): $\frac{2}{3} n^3$ a.o
- Invers: $2n^3$ a.o
- Matrismultiplikation $2n^3$ a.o

Beräkningstiden beror på antalet a.o

$$t(n) \approx C \cdot n^p$$

$$\frac{t(2n)}{t(n)} \approx \frac{C \cdot (2n)^p}{C \cdot n^p} = 2^p$$

Kan man LU-uppdela alla icke-singulär A?

ex:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} x = \underset{b}{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$ har lösningen $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gauss-eliminationen fungerar inte.

Åtgärd: byt rader.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P\cdot A}\underbrace{\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}}_{P\cdot b} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PA = L \cdot U$$

Får man bra noggrannhet?

ex: räkna med 5 s.s och lös

$$\begin{pmatrix} 10^{-6} & 1 \\ 1 & 10^{-6} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rätt lösning — 5 ss.

$x_1 = x_2 = 0{,}99999900\ldots \approx 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-6} & 1 & 1 \\ \boxed{10^{6}} & * & ** \end{array}\right)$$

(*) $10^{-6} - 10^{6}\cdot 1 \approx -10^{6}$

(**) $1 - 10^{6}\cdot 1 \approx -10^{6}$

stora värden nu $\Rightarrow$ stora avrundningsfel pga stor multiplikator

$x_2 = 1$ ok!

$x_1 = \dfrac{1 - 1\cdot \overset{=1}{x_2}}{10^{-6}} = 0$ Ej ok!

jämför med rätt värde

$$|\Delta x_1| \leq \left| \frac{-1}{10^{-6}} \Delta x_2 \right| \approx 10^{6} \cdot 10^{-6} = 1$$

$x_1 = 0 \pm 1$

stort värde $\Rightarrow$ stort fel i x_1 pga litet pivotelement.

Vi vill ha: stort pivotelement

liten multiplikator

Åtgärd: byt rader

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^{-6} & 1 \\ 10^{-6} & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^{-6} & 1 \\ 10^{-6} & 1^{*} & ** \end{array}\right)$$

$(*)$ $1 - 10^{-6} \cdot 10^{-6} \approx 1$

$(**)$ $1 - 10^{-6} \cdot 1 \approx 1$

$x_2 = 1, \; x_1 = \dfrac{1 - 10^{-6} \cdot x_2}{1} \approx \dfrac{1}{1} = 1$ OK!

PARTIELL PIVOTERING (för bra noggrannhet)

Byt rader så att |pivotelementet| blir så stort som möjligt $\Rightarrow$ |multiplikator| ≤ 1

$\Rightarrow$ matriselementen, beräkningsfelen $\Big\}$ förstoras inte onödigt.

G

pivotelement

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 20 \\ 2 & 0 & 8 & 12 \\ -1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)}_{A \qquad b}$$

behåll (1)

$(2) - \frac{2}{5}(1)$

$(3) - \left(-\frac{1}{5}\right)(1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 20 \\ 0.4 & -2 & 12 & 4 \\ -0.2 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

$(3) - \dfrac{2}{-2}(2)$

multiplikator

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 20 \\ 0.4 & -2 & 12 & 4 \\ -0.2 & -1 & 15 & 15 \end{array}\right) \quad =U \text{ (övre)}, \; =L \text{ (nedre)}$$

bakåtsubstraktion.

$x_1 = 2$
$x_2 = 4$
$x_3 = 1$

Permutationsmatris P

ex, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P.A$ byter rad 1 och 2 i A

antag radbyten (1) och (2), (2) och (3), bilda P:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{1 \text{ och } 2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2 \text{ och } 3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

OBS! Lös $Ax = B$ då $P \cdot A = L \cdot U$

$$PAx = Pb, \quad L \cdot \underbrace{Ux}_{y} = P \cdot b$$

1. Lös $Ly = Pb$
2. Lös $Ux = y$ OBS!