Föreläsning 9

TANA21 – Beräkningsmatematik

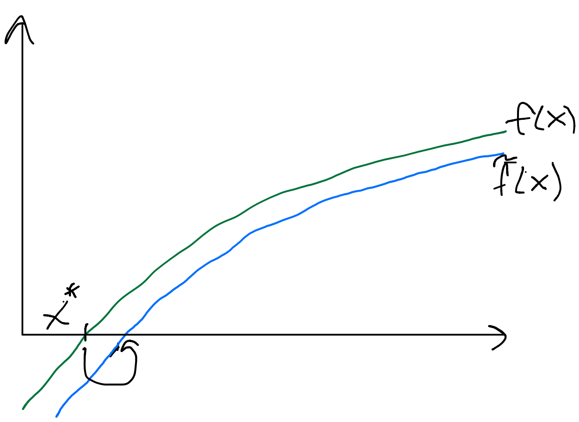
Icke-linjära ekvationer

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

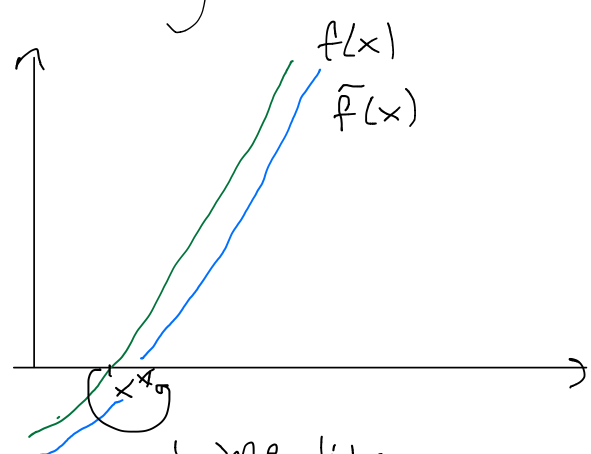
Sök en rot till $f(x)=0$ (nollställe till $f(x)$)

Givet startapproximation x_0 (ev även x_1) ger en itterationsmetod $x_1, x_2, \dots$, så $x_n \to x^*$ som är den exakta roten.

Kondition och feluppskattning

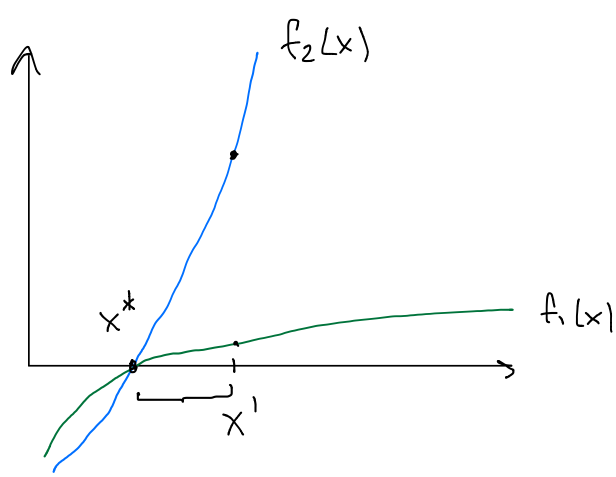


Störningskänsligt.
Illa-konditionerat



inte lika mycket. fig. 4.6
Välkonditionerat.

$|f'(x^*)|$ avgör, bra med stor $|f'(x^*)|$



$f(\bar{x})$ är inget bra mått på $|\bar{x}-x^*|$
derivatan spelar roll

Metodoberoende feluppskattning

Låt $\bar{x}$ vara en approximation* till x^*. Då gäller

$$|\bar{x}-x^*| = \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\xi)|}$$ för något ξ mellan x^* och $\bar{x}$.

fås från medelvärdessatsen.

$$\frac{f(\bar{x})-f(x^*)}{\bar{x}-x^*} = f'(\xi) \text{ och } f(x^*)=0$$

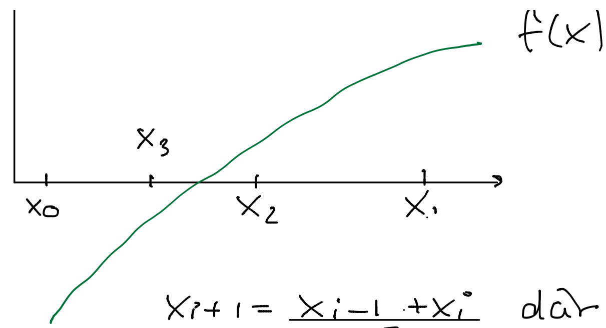
Feluppskattning gäller för enkelrötter, ty $f'(x^*) \neq 0$ krävs

Dubbelrot har $f'(x^*)=0$

$$f(x) = (x-2)^2$$
$$f'(x) = 2(x-2)$$
$$f'(2) = 0$$

Metoder:

- Intervallhantering (bisektion)



$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad \text{där} \quad x^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

Ex:

- $f(x) = e^{-x} - x$

Välj $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

$f(0) = 1 > 0 \quad f(1) = -0{,}6\ldots < 0$

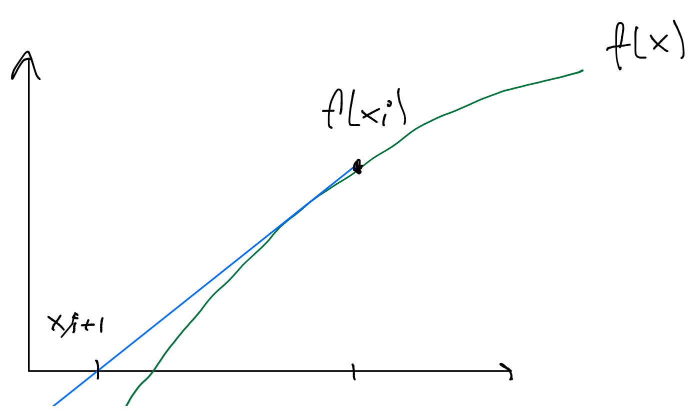
$\Rightarrow x^* \in [0, 1]$

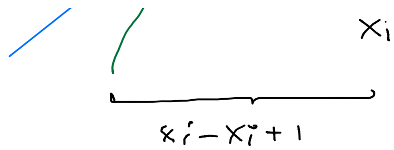
$f(0{,}5) = 0{,}1\ldots > 0 \qquad \Rightarrow x^* \in [0{,}5, 1]$

$f(0{,}75) = -0{,}2\ldots < 0 \qquad \Rightarrow x^* \in [0{,}5, 0{,}75]$

- Robust, konvergerar säkert om $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.
- Långsam

Newton-Raphsons metod

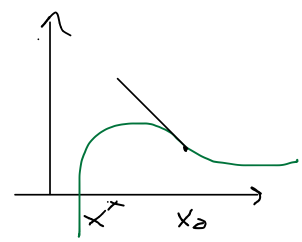




Approximera med tangenten i $(x_i, f(x_i))$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \rightarrow x_{i-1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- mycket snabb konvergens
- konvergerar om x_0 är bra nog. (ej robust)
- kräver att $f'(x)$ kan beräknas (kostsamt)



Ex:

- $f(x) = e^{-x} - x$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Välj $x_0 = 0{,}5$

$x_1 = 0{,}5663\ldots$

$x_2 = 0{,}5671\ldots$

Välj tex $\bar{x} = 0{,}567$

Metodoberoende feluppskattning, approximativt

$$|\bar{x} - x^*| = \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\xi)|} \approx \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} \approx \frac{2{,}2\ldots \cdot 10^{-4}}{1{,}56\ldots} \leq 1{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Strikt men mera mödosamt:

$$|\bar{x}-x^*| \le \frac{|f(\bar{x})|}{\min |f'(\xi)|}$$
$$\xi \in [\bar{x}, x^*]$$

Undersök $f'(x)$ i $[\bar{x}, x^*]$

$f(0.567) = +2{,}2 \cdot 10^{-4}$ $f'(0{,}567) = -1{,}56\ldots$

$f(0{,}6) = -0{,}05\ldots$ $f'(0{,}6) = -1{,}54\ldots$

$x^* \in [0{,}567, 0{,}6]$

$$\Rightarrow |\bar{x}-x^*| \le \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(0{,}6)|} \le 1{,}5 \cdot 10^{-4}$$

då minst vs $1{,}449\ldots10^{-4}$ med approx lösning.

$x^* = 0{,}567 \pm 2 \cdot 10^{-4}$

Konvergenshastighet

Def:

En metod har konvergensordning p (ej nödvändigtvis heltal).

Om $|x_{i+1} - x^*| \le C|x_i - x^*|^p$ för någon konstant C

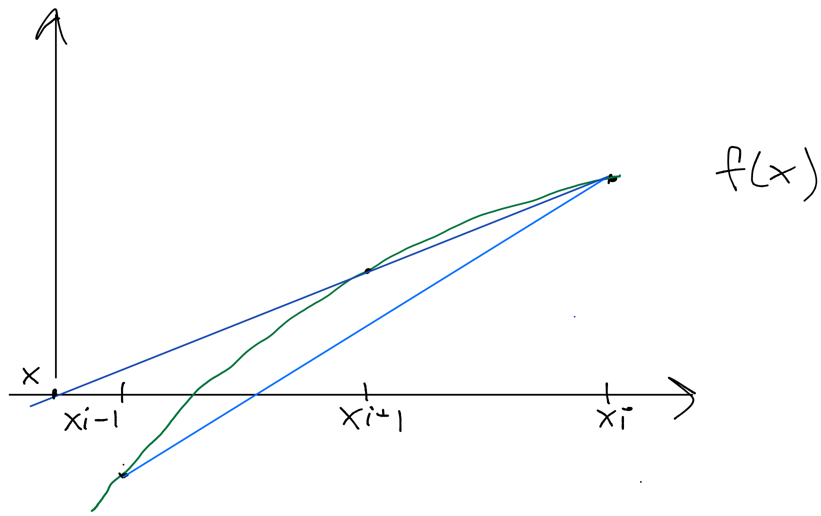
Kvadratisk konvergens, $p=2$, gäller för Newton-Raphson för enkelrötter.

Tumregel: antalet korrekta decimaler fördubblas ungefär i varje iteration. ty om vi har t korrekta decimaler i x_i är

$$|x_i - x^*| \le 0{,}5 \cdot 10^{-t} \Rightarrow |x_{i+1} - x^*| \le C \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-2t},$$

dvs 2t korrekta decimaler om $C \leq 2$.

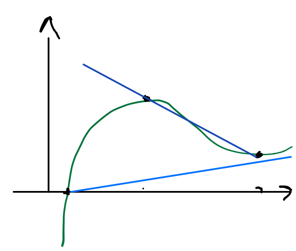
Sekantmetoden



Två godtyckliga startvärden behövs.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

- ganska snabb metod
- ej robust
- derivata krävs ej



Regula-Falsi

Som intervallhalvering men x_{i+1} med sekantmetoden

- robust
- ganska långsam

Den perfekta metoden finns inte.
Matlabs fzero kombinerar sekantmetoden och intervallhantering och invers kvadratisk

Interpolation.

Fixpunktsitteration

Skriv om $f(x)=0$ på fixpunktsform $x=\varphi(x)$ eller $g(x)$

Ett nollställe till $f(x)$ är en fixpunkt till $\varphi(x)$

fixpunktsitteration: $x_{i+1}=\varphi(x)$

Ex:

$$e^{-x}-x=0$$

1) $x=e^{x}$ $\qquad x_{i+1}=e^{-x_i}=\varphi_1(x_i)$

2) $\ln x=-x$ $\qquad x_{i+1}=-\ln x_i=\varphi_2(x_i)$

3) $x+x=e^{-x}+x$ $\qquad x_{i+1}=\frac{e^{-x_i}+x_i}{2}=\varphi_3(x_i$

Vilken konvergerar snabbast?

Villkor för konvergens

Medelvärdessatsen:

$$\underbrace{\varphi(x_i)}_{x_{i+1}}-\underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*}=\varphi'(\xi)(x_i-x^*) \quad \xi\in[x_i,x^*]$$

$$x_{i+1}-x^*=\varphi'(\xi)(x_i-x^*)$$ men belopp.

$$|x_{i+1}-x^*|=|\varphi'(\xi)||x_i-x^*|$$

om $|\varphi'(\xi)|\leq m<1$ får vi

$$|x_1 - x^*| \leq m\,|x_0 - x^*|$$
$$|x_2 - x^*| \leq m\,|x_1 - x^*| \leq m^2 |x_0 - x^*|$$

så $|x_n - x^*| \leq m^n |x_0 - x^*| \to 0$ då $n \to \infty$
snabbast om m är litet, $|\varphi'(x)| \leq m < 1$ krävs
nära roten.
Konvergensordningen är linjär ty

$$|x_{i+1} - x^*| \leq \underbrace{m}_{=C} |x_i - x^*|^1, \text{ dvs } p = 1$$

exemplet.

$\varphi_1'(x) = -e^{-x}$

$\varphi_1'(0{,}567) \approx -0{,}567$ konvergent.

$\varphi_2'(x) = -\frac{1}{x}$

$\varphi_2'(0{,}567) - 1{,}76$ divergent

$\varphi_3'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} + 1)$

$\varphi_3'(0{,}567) \approx 0{,}216$ snabbare än φ_1