Föreläsning 8

TANA21 – Beräkningsmatematik

Ordinära differentialekvationer

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Vi kan lösa $y'=f(x,y)$, $y(a)=c$
även då y är vektor (system av ODE)
med Runge-Kutta-metoder

Matlab:

```
>> f=@(x,y) -10·y
>> ode23(f,[0 3],1)
```

inte semikolon

```
xx= 0:0.05:3;
plot(xx,exp(-10.*xx)), hold on,
myeuler(f,0,3,1,0.15), hold off.
```

steglängd

Räcker det med att en metod är konvergent.

$|e_n| \to 0$ då $h \to 0$

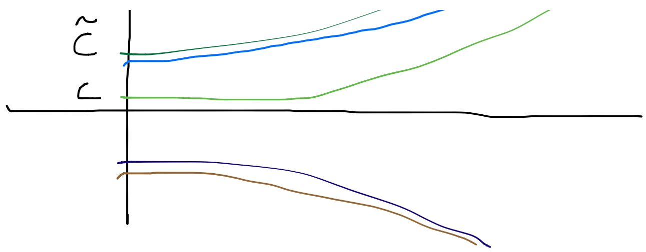
globalt trunkeringsfel.

Euler verkar ha krav på h för att fungera

Stabilitet

Ex: $y'=y$ $y(0)=c$

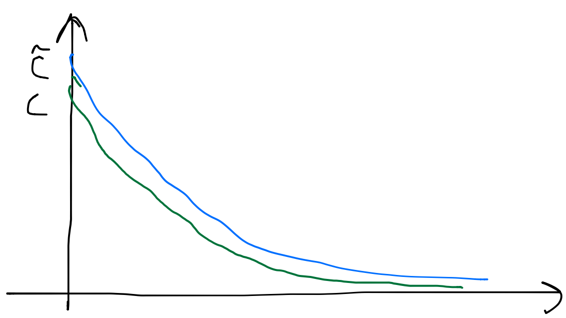
lösning $y=c \cdot e^x$



Instabil lösning. En liten skillnad i c ger stor skillnad i lösningen.

Ex:

$y' = -y$, $y(0) = c$ Lösning $y = c \cdot e^{-x}$



Stabil lösning, liten skillnad. (begränsad lösning).

Stabil metod

Studera testekvationen $y' = \lambda \cdot y$, $\lambda < 0$

Stabil och begränsad lösning.

På Euler framåt ($h_i = h$)

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda \cdot y_i = (1 + h \cdot \lambda) y_i$$

så $y_1 = (1 + h\lambda) y_0$

$$y_2 = (1 + h\lambda) \cdot y_1 = (1 + h\lambda)^2 \cdot y_0$$

$$\vdots$$

$$y_n = (1 + h\lambda)^n \cdot y_0$$

amplifikationsfaktor

Om $y_0 = C + \varepsilon$ där ε är störning, får vi

$$y_n = (1+h\lambda)^n (C+\varepsilon) = \underbrace{(1+h\lambda)^n \cdot C}_{\text{rätta Euler lösningen}} + \underbrace{(1+h\lambda)^n \cdot \varepsilon}_{\text{"parasitlösning" kan bli stor om } |1+h\lambda|>1}$$

Lösningen ska vara begränsad.

$\Leftrightarrow$ Krav för stabilitet: $|1+h\lambda| \leq 1$

dvs, $\underbrace{-1 \leq 1+h\lambda}\leq 1$, $-1 \leq \underbrace{1+h\lambda \leq 1}$

$-1 \leq 1+h\lambda \Leftrightarrow -2 \leq h\lambda \Leftrightarrow \frac{-2}{\lambda} \geq h$

ty λ negativ.

$1+h\lambda \leq 1 \Leftrightarrow h\lambda \leq 0 \Leftrightarrow h \geq \frac{0}{\lambda} = 0$

$0 \leq h \leq \frac{-2}{\lambda}$, litet h krävs om $|\lambda|$ stor

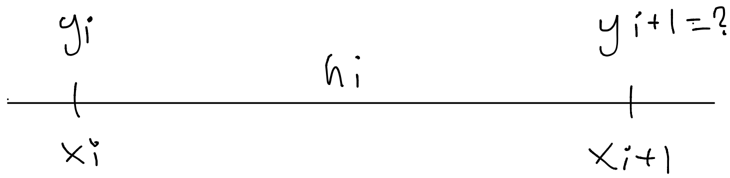
Amplifikationsfaktor är $1+h\lambda$ för Euler framåt.

Euler bakåt

$y' = f(x,y)$, $x_0 \leq x \leq x_n$

$y(x_0) = C$

Utgå från bakåt differens i x_{i+1} $[D\, y(x_{i+1})]$



$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$ ger $y_{i+1}=y_i+h_i\cdot y'(x_{i+1})$

eller $y_{i+1}=y_i+h_i f(x_{i+1}, \underbrace{y_{i+1}}_{\text{söker}})$

y_{i+1} sökes, ingår i f-uttrycket, metoden är implicit.

I varje steg måste en ekvation lösas

Ex

$$y'=y, \quad 0\le x\le 1, \quad h_0=h_1=0{,}5, \quad y(0)=1$$

givet $y_0=1$

$$y_1=y_0+h_0\cdot y_1 \Rightarrow y_1=2 \text{ då } h_0=0{,}5$$

$$y_{i+1}=\frac{y_i}{1-h_i}$$

$y_2=\frac{2}{1-0{,}5}=4 \approx y(1)\approx 2{,}72$, mindre h behövs!

Vilken noggrannhetsordning gäller?

Lokalt trunkeringsfel (låt $h_i=h$)

Sum $y_i=y_{i-1}+h\cdot f(x_i,y_i)$, $y_{i-1}=y(x_i-h)$ gäller

$$l_i=y_i-y(x_i)=\ldots=O(h^2)$$

så globalt trunkeringsfel är $O(h^1)$, noggrannhetsordn. är 1. Finns någon fördel med Euler bakåt?
Studera testekvationen $y' = \lambda y, \; \lambda < 0$
$y(0) = c$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \lambda \cdot y_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - h\lambda}$$

$$y_1 = \frac{1}{1-h\lambda} \cdot y_0$$

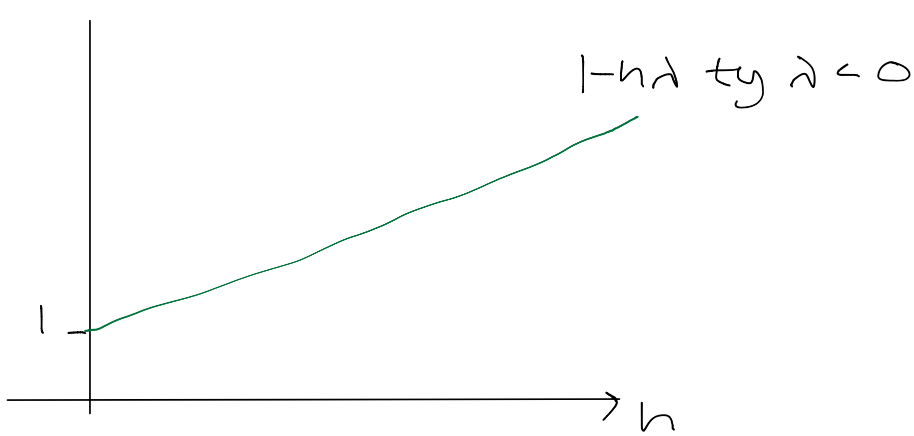
$$\vdots$$

$$y_n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n y_0$$

om $y_0 = c + \varepsilon$: $y_n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n \cdot c + \underbrace{\left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n \cdot \varepsilon}_{\text{får inte växa}}$

Villkor för stabilitet:

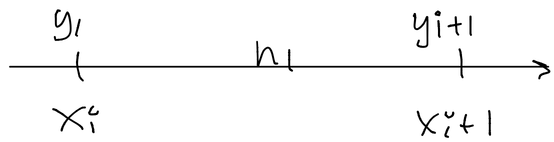
$$\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| \leq 1 \quad \text{dvs} \quad 1 \leq |1-h\lambda|$$



är sant för alla $h > 0$.
Euler bakåt - inget villkor på h behövs.

Trapetsmetoden

$y' = f(x, y(x))$, utnyttja ~~trapetsregeln~~



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' \, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \, dx$$

$$\underbrace{[y(x)]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{\text{approx.}} = \underbrace{y(x_{i+1})}_{y_{i+1}} - \underbrace{y(x_i)}_{y_i} \qquad \underbrace{\frac{h_i}{2}\left(f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right)}_{\text{trapetsregeln ger.}}$$

Trapetsmetoden blir

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right)$$

Implicit metod med trunkeringsfel $O(h^2)$

Stabilitet för trapetsmetoden

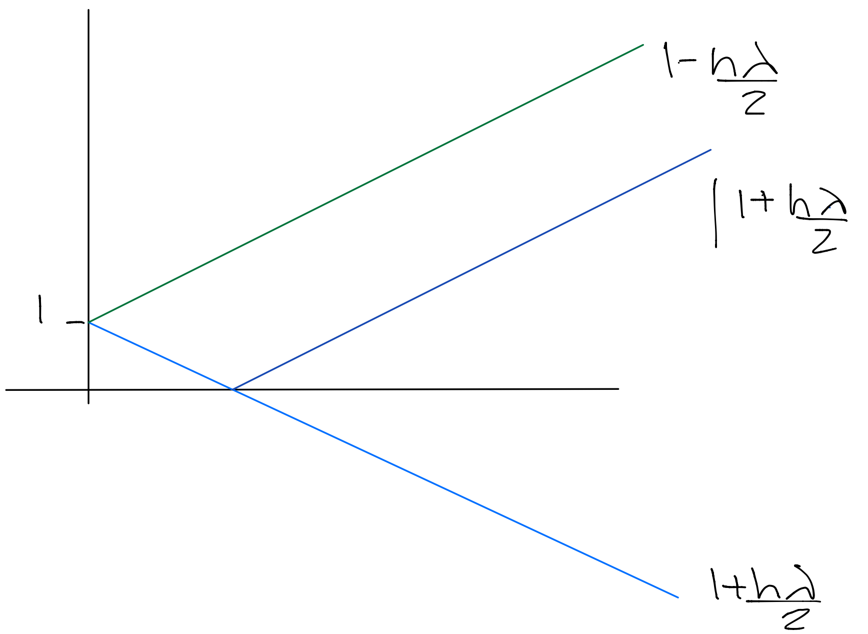
$y' = \lambda y$, $\lambda < 0$ $y(0) = c$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda y_{i+1})$$

$$y_{i+1} = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - h\lambda}\right) \cdot y_i$$

Krav för stabilitet:

$$\left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right| \le 1, \quad \left|1+\frac{h\lambda}{2}\right| \le \left|1-\frac{h\lambda}{2}\right|$$



gäller för alla $h>0$

Trapetsmetoden är bra för styva system av diff. ekv (tex boken s. 331)

Ex:

$$y'' + 101\cdot y' + 100\cdot y = 0, \quad y(0) = 1{,}1, \quad y'(0) = -11$$

Skrivs om till

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}_{z'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -101 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{z} \qquad \lambda = \begin{cases} -100 \\ -1 \end{cases}$$

har lösningen $y(x) = \underbrace{0{,}1 \cdot e^{-100x}}_{y_1(x)} + \underbrace{e^{-x}}_{y_2(x)}$

snabbt avtagande långsammare.

I början krävs litet h medan $y_1(x)$ finns.
Sedan kan h ökas med trapetsmetoden, men
inte med Runge-Kutta-metoden, pga
stabilitetskraven.

Ex: Lös $z' = Az$ med trapetsmetoden, $h_i = h$

$$z(0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}\left(A \cdot z_i + A z_{i+1}\right)$$

$$\underbrace{\left(I - \frac{h}{2} \cdot A\right)}_{\text{matris}} \underbrace{z_{i+1}}_{\text{söks}} = \underbrace{\left(I + \frac{h}{2} \cdot A\right) z_i}_{\text{uträknad vektor}}$$

Lös ekvationssystemet:

LU-faktorisera

Beräkna i varje steg.

framåtsubst

bakåtsubst.