Föreläsning 5

TANA21 – Beräkningsmatematik

Interpolation
Approximation

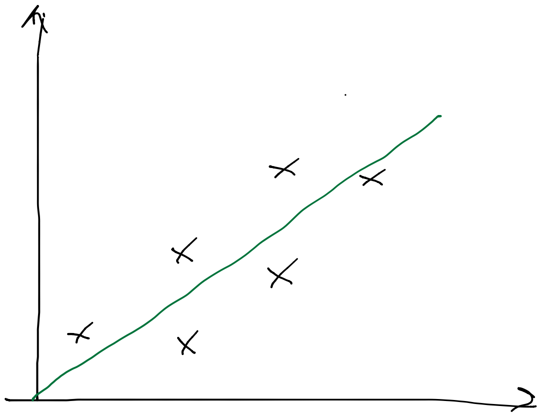
Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Approximation

Uppgift: Bestäm en kurva som passar givna punkter bra.

Användning: Anpassa teoretisk modell till mätdata
- approximera "dyr" funktion med billig
- prognoser

Metoder: Minsta kvadratmetoden
- (minimera ett-norm
  minimera max-norm)



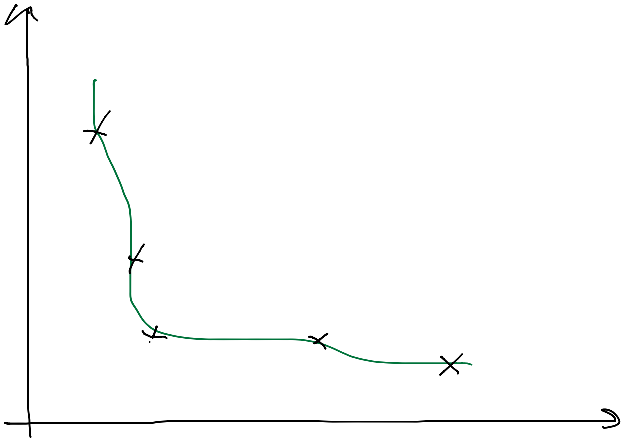
Interpolation

Uppgift: Bestäm en kurva som går genom givna punkter.

Användning: Finn värden mellan de givna
- CAD: spara få punkter, interpolera vid behov.
- funktionstabell

Metoder: polynom
- splines

(: trigonometriskt)



Polynominterpolation

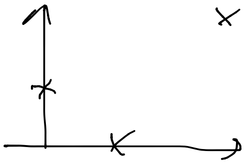
Sats:

Givet n+1 punkter (distinkta) (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n+1$ så finns exakt ett polynom av grad n eller lägre som interpolerar punkterna.

Det kan dock bestämmas på olika sätt.

Ex:

x	0	1	3
y	1	0	2



Monom form

- Ansats: $p(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2$

$$p(0) = C_1 \qquad = 1$$
$$p(1) = C_1 + C_2 + C_3 \qquad = 0$$

ku. fram, bak.

$p(3) = c_1 + 3c_2 + 9c_3 = 2$

ger $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{5}{3}$ och $c_3 = \frac{2}{3}$ så

$p(x) = 1 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

Newtons metod

- Ansats $p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \cdot \varphi_i(x)$ där

$\varphi_i(x) = 1 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})$

	x_1	x_2	x_3
x	0	1	3
y	1	0	2

$$p(x) = c_1 \cdot 1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= c_1 + c_2(x - 0) + c_3(x - 0)(x - 1)$$

$p(0) = c_1 = 1$

$p(1) = c_1 + 1 \cdot c_2 = 0$ framåtsubst.

$p(3) = c_1 + 3c_2 + 6c_3 = 2$

ger $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = \frac{2}{3}$ så

$p(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1)$

- Lagrange metod

Ansats: $p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \cdot \varphi(x)$ där

$$y_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}$$

	x_1	x_2	x_3
x	0	1	3
y	1	0	2

$$\frac{\cancel{(x-\overbrace{x_1}^{0})}(x-\overbrace{x_2}^{1})(x-\overbrace{x_3}^{3})}{\cancel{(x_i-x_1)}(x_i-x_2)(x_i-x_3)}$$

Om $i=1$ booom!

$$p(x) = c_1\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} + c_2\frac{(x-0)(x+3)}{(1-0)(1-3)} + c_3\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}$$

$p(0) = c_1 = 1$

$p(1) = c_2 = 0$ dvs $c_i = y_i$

$p(3) = c_3 = 2$ är direkt kända.

Så $p(x) = 1\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{3} + 2\,\frac{x(x-1)}{6}$

Horners schema

Att beräkna

$p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x\cdot x + \ldots + c_{n+1}\cdot\overbrace{x\cdot x\ldots x}^{n\text{ st}}$

Kräver $O(n^2)$ beräkningar (aritmetiska operat.)

Skriv om enligt Horner då $n=3$

$p(x) = c_1 + x(c_2 + x(c_3 + c_4\cdot x))$

Kräver $O(n)$ a.o.

Aritmetisk komplexitet

	bestämning av c_i	beräkning av $p(x)$
monom	$O(n^3)$	$O(n)$ Horner
Newton	$O(n^2)$	$O(n)$ Horner
Lagrange	O	$O(n^2)$

Trunkeringsfelet

Sats: 5.2.2

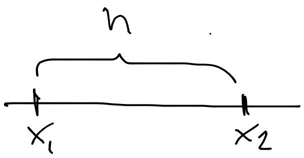
Antag ~~att~~ f(x) är snäll, dvs har n+1 kont. derivater.

Då gäller:

$$f(x) - p_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}}_{\text{konstant}} (x-x_1)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})$$

Om $n=1$

$$|f(x)-p_1(x)| \leq \text{konstant} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}$$



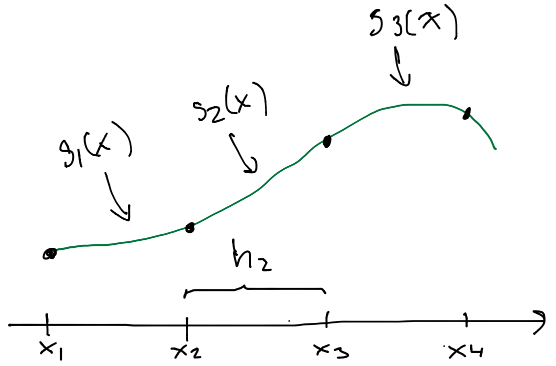
Matlab!

- Polyfit
- Polyval

Runges fenomen:

Undvik interpolation med höga gradtal. Kan ge kraftiga svängningar, speciellt vid kanterna.

Spline-interpolation



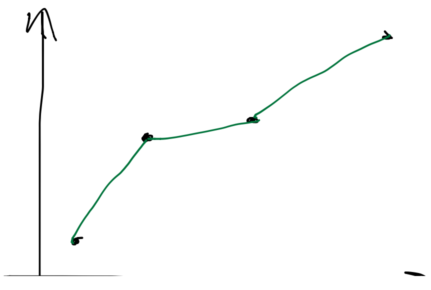
En kubisk splinefunktion, $s(x)$, är sammansatt av olika tredjegradspolynom, $s_i(x)$, med kont. $s(x)$, $s'(x)$ och $s''(x)$ samt två tilläggsvillkor.

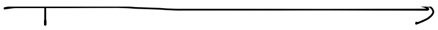
n st noder.

tex naturliga ändpunktsvillkor: $\begin{cases} s''(x_1)=0 \\ s''(x_n)=0 \end{cases}$

rätta ändpunktsvillkor $\begin{cases} s'(x_1)=f'(x_1) \\ s'(x_n)=f'(x_n) \end{cases}$

Linjär spline





Bara s(x) är kont.

Kubisk spline

Ansats: $s_i(x) = a_i + b_i\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + c_i\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 + d_i\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3$

gäller $x_i \le x \le x_{i+1}$

$0 \le \left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \le 1$ bra form!

Ex:

$s_1(x)$ $s_2(x)$

i	1	2	3
x_i	0	1	3
y_i	1	0	2

Bestäm kubisk spline med naturliga ändpunktsvillkor.

Ansats: $s_1(x) = a_1 + b_1\left(\frac{x-0}{1}\right) + c_1 x^2 + d_1 x^3 \quad 0 \le x \le 1$

$$s_2(x) = a_2 + b_2\left(\frac{x-1}{2}\right) + c_2\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + d_2\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 \quad 1 \le x \le 3$$

Interpolationsvillkor:

$s_1(0) = a_1 = 1$

$s_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$

$s_2(1) = a_2 = 0$

$s_2(3) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$

Derivatavillkor $s_1'(1) = s_2'(1)$

ger $b_1 + 2c_1 + 3d_1 = \underline{1} \cdot b_2$

Andraderivatavillkor $s_1''(1)=s_2''(1)$

ger $2c_1+6d_1=\frac{1}{2}\cdot c_2$

Naturliga ändpunktsvillkoren.

$s_1''(0)=2c_i=0$

$s_2''(3)=\frac{1}{2}c_2+\frac{3}{2}d_2=0$

Vi får att
$$s(x)=\begin{cases}1-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}x^2\\-\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)+4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3\end{cases}$$