Sammanfattning Dynamik

TMME13

HT7 15/16

Rätlinjig rörelse - Partikel kinematik

När hastigheten efterfrågas som funktion av sträckan, (inte av tiden).

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

$$\Rightarrow \quad a\,ds = v\,dv$$

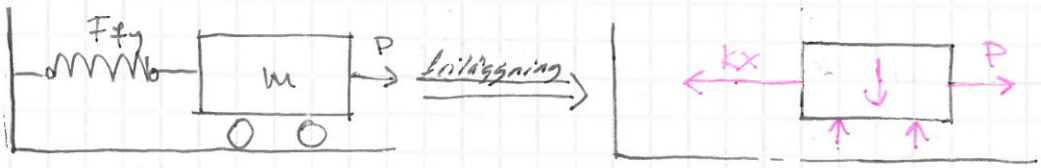
Svängningar

Fria svängningar

- odämpade
- dämpade

Påtvingade svängningar

Fria svängningar - odämpade



Grundform för fria svängningar

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{P}{m}$$

$$x(t) = x_h + x_p$$

Bestäm $x(t) = x_h + x_p$

1. ta fram den karakteristiska ekv.
2. Bestäm homogenlösningen, x_h.

$\lambda_1 = \alpha \quad \lambda_2 = \beta \quad \Rightarrow \quad Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$

$\lambda = \pm \alpha \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha x}(A + Bx)$

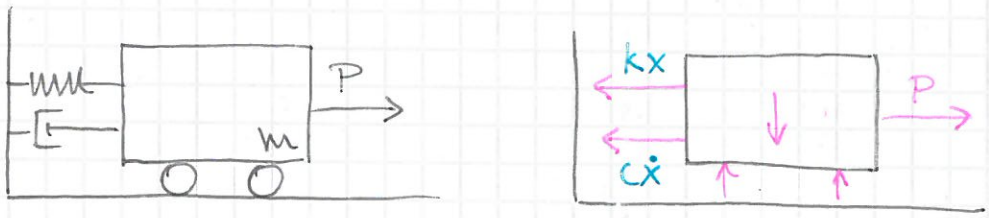
$\lambda = \alpha + \beta i \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

3. Ta fram partikulär lösningen, x_p

Gör ansatts utefter HL.

4. Bestäm konstanterna A och B m.h.a. begynnelsevillkor. Oftast genom derivering.

Fria svängningar – dämpade



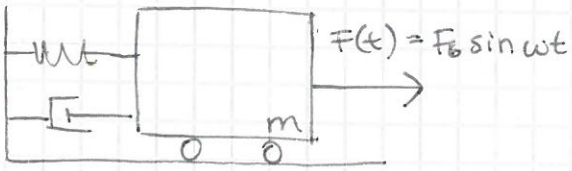
Grundform för dämpade svängningar

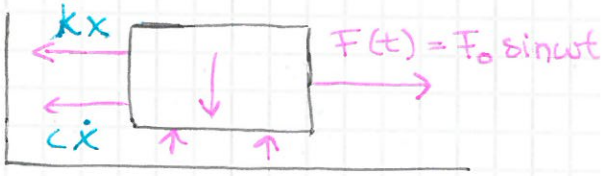
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P}{m}$$

Ta fram $x(t)$ som ovanstående.

$T = 2\pi \cdot \omega$

Påtvingade svängningar





x_h genom K.E, eventuellt

$$x_h = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$$

$$x_h = C\sin(\omega_n t + \varphi)$$

x_p genom

$$x_p = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Oftast f. behövs bara ett del av ledet. I vårt fall vet vi att $B\cos\omega t$ kommer att bli noll. Därför duger $x_p = A\sin\omega t$.

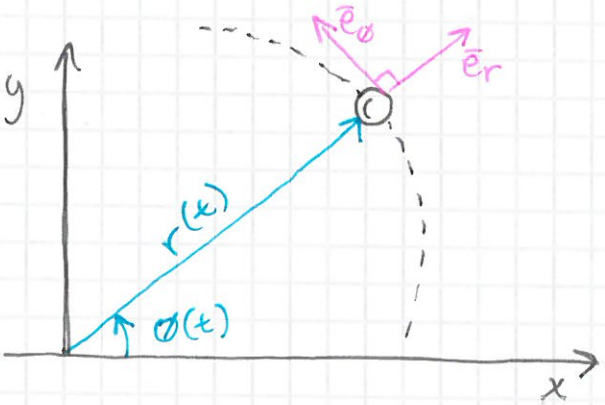
Kinematik och kinetik i polära- och cylinderkoord.

$$\bar{v} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\phi}\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\bar{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\bar{e}_\phi$$

r = sträcka $\Rightarrow$ $\dot{r}$ = hastighet $\Rightarrow$ $\ddot{r}$ = acceleration

ϕ = vinkel $\Rightarrow$ $\dot{\phi}$ = vinkelhast. $\Rightarrow$ $\ddot{\phi}$ = vinkelacc.

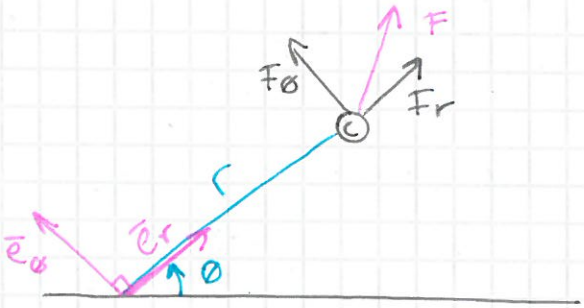


$\bar{e}_\phi$, ritas åt de håll där vinkeln ϕ ökar.

Newtons II i karakteristiska koord

$\Rightarrow \quad F_x = m\ddot{x}$ etc.

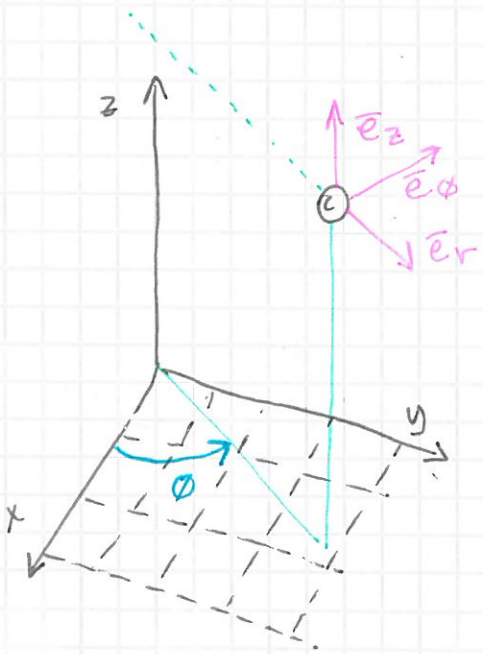
Newtons II i Polära koord



$$\bar{e}_r: \quad F_r = m\underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}$$

$$\bar{e}_\theta: \quad F_\theta = m\underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}$$

Om partikeln kan röra sig ut ur (r, θ)-planet



$$\bar{a} = a_r\bar{e}_r + a_\theta\bar{e}_\theta + \underbrace{a_z}_{=\ddot{z}}\bar{e}_z$$

Arbete och Energi

Energibalans

$$U'_{2-1} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där,

$$U' = \int F(\bar{r})\, d\bar{r}$$

$$\Delta T = \frac{m}{2}\left(\bar{v}_2^2 - v_1^2\right) \quad \text{– rörelseenergi}$$

$$\Delta V_g = mg\,(h_2 - h_1) \quad \text{– lägesenergi}$$

$$\Delta V_e = \frac{k}{2}\left(L - L_0\right)^2 \quad \text{– elastiskenergi}$$

Stöd anteckning till Jennifer

$V_e = \frac{k}{2}(L - L_0)^2$ om fjädern går från vila till 2. Men om det finns en elastisk energi från början och en i slutet behöver jag ta

$V_{e_2} - V_{e_1} = \Delta V_e$

Desamma gäller för allihopa där av Δ...

Effekt

$$P = F \cdot \bar{v}$$

Notera även $P\,dt = F \cdot d\bar{r}$

Rörelsemängds moment

En partikels rörelsemängd, $\bar{G}$:

$$\bar{G} \overset{def}{=} m\bar{v}$$

$F = m \cdot a$ kan alltså skrivas $F = \dot{\bar{G}}$

dvs, krafter ändrar rörelsemängd, definieras i statiken som kraftmoment.

$$\bar{M}_0 = r \times F$$

En partikels rörelsemängdsmoment, $\bar{H}$, blir där av

$$\bar{H}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times \bar{G}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \bar{M}_0 = \dot{\bar{H}}_0}$$, 0: en fixpkt.

Ovanstående är momentlagen för en partikel. Alltså: vi kan välja $\bar{F} = m\bar{a}$ eller $\bar{M}_0 = \dot{\bar{H}}_0$. $\bar{M}_0 = \dot{\bar{H}}_0$ är ofta lämplig vid centralrörelse

Rellativrörelse/Stelkropps kinematik - rotation & translation samtidigt.

Hastighet- & accerellations-samband

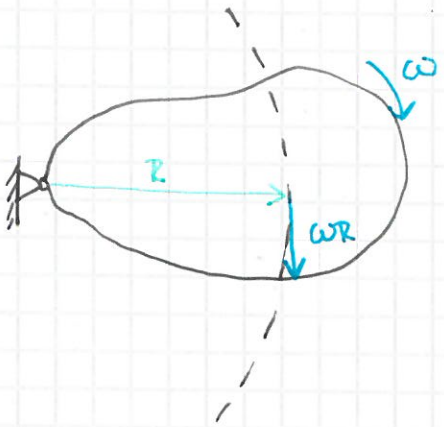
Låt A och B vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$$

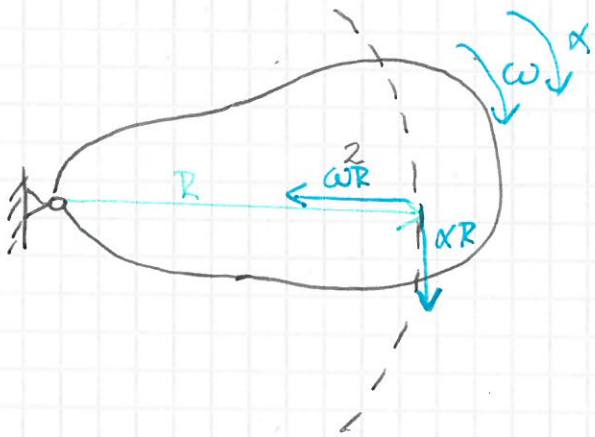
$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{\alpha}}_{\alpha = \dot{\bar{\omega}}} \times \bar{AB} + \omega \times (\bar{\omega} \times AB)$$

Plan fixpunkt rotation

Hastighet

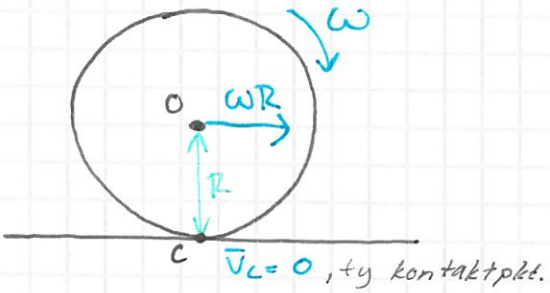


Accerellation

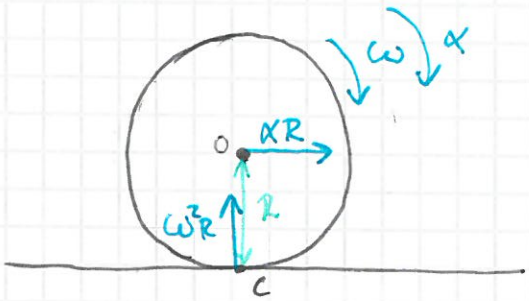


Plan rullning utan glidning

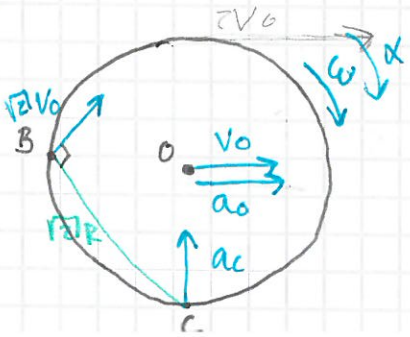
Hastighet



Accerellation



Sammanfattning



$V_0 = \omega R$

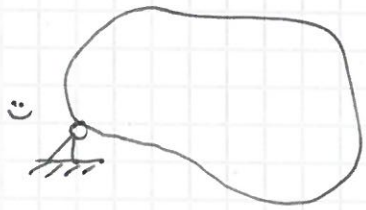
$a_0 = \alpha R$

$V_C = 0$

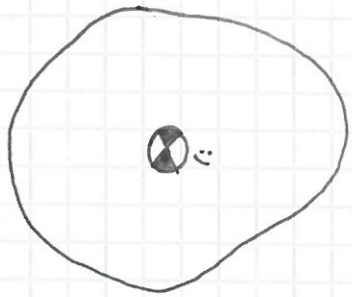
$V_0 = \omega^2 R$

Hastigheten i C är noll så hast i andrapunkter är prop. mot avståndet från C och riktad vinkel rät mot linjen från C. Se

$\sum M = I\alpha$ gäller endast,

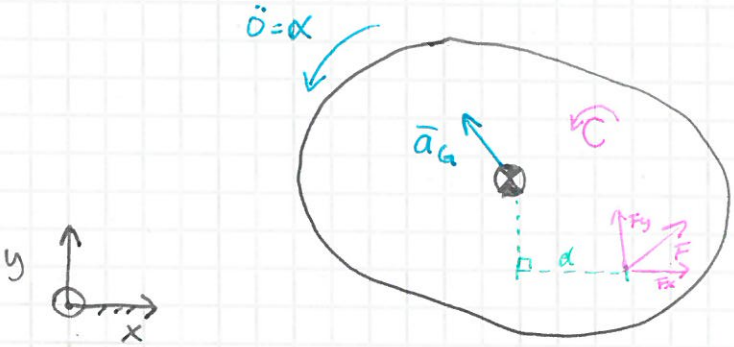


fix.pkt i universum
och på kropp



Masscentrum

Eulers rörelselagar i planet



<u>Korrekt notation</u>

$\sum F_x = m a_{Gx}$

$\sum F_y = m a_{Gy}$

$\sum M_{Gz} = Fd + C = I_{Gzz}\ddot{\theta}$

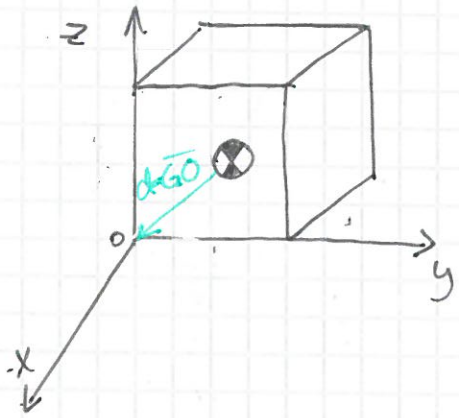
<u>Vad som skrivs</u>

$F_x = m a_x$

$F_y = m a_y$

$M_G = I_G \alpha$

Steiners satts



Allmänt: $I_O = I_G + md^2$, gäller endast när G är masscentrum.

I exempel:

$I_{O,xy} = I_{G,xy} + m\,dx\,dy$

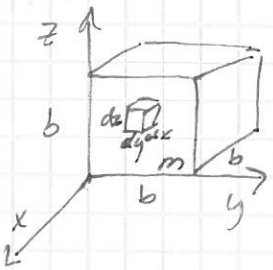
Alla koordplan är symplan $\Rightarrow I_{G,xy} = 0$

$$\overline{GO} = \left(\underbrace{\frac{b}{2}}_{dx}, \underbrace{-\frac{b}{2}}_{dy}, \underbrace{-\frac{b}{2}}_{dz}\right)$$

$$I_{O,xy} = 0 + m\frac{b}{2}\left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{mb^2}{4}$$

Går även att integrera fram

då gäller:



$$I_{O,xy} = \int xy\,dm$$

$$I_{O,zz} = \int (x^2 + y)\,dm$$

där, $dm = \frac{\text{elementets volym}}{\text{hela volymen}} \cdot \text{hela massan} =$

$$= \left/ \rho = \frac{\text{massa}}{\text{volym}} = \frac{m}{b^3} \right/ = \frac{dx\,dy\,dz}{b^3} \cdot m = \rho\,dx\,dy\,dz$$

Eulers rörelselagar i tre dim. $\bar{H}_0 = \bar{I}_0 \bar{\omega}$

$$\sum M_0 = \frac{d}{dt}\Big|_f \bar{H}_0 : \dot{G} = \frac{d}{dt}\Big|_f (\bar{I}_0 \bar{\omega}) = [\text{coriolis}]$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{xyz} (\bar{I}_0 \bar{\omega}) + \bar{\Omega}^{xyz/f} \times (\bar{I}_0 \bar{\omega}) = \dot{G}$$

Beräkning av tal

1. Frilägg
2. Rörelse ekv. mha. coriolis, se ovan.
3. Val av koord. (Är viktigt)
   - låt xyz följa skivans rot, då är vi säkra på att $\bar{I}_0$ = konst.
   - Vinkla xyz så att xyz blir samma som koordplan.
4. Hitta symetri

   om $x \perp$ symplan så $I_{xz} = 0, I_{xy} = 0$

   om $y \perp$ symplan så $I_{xy} = 0, I_{yz} = 0$

   o.s.v.

5. Ställ upp matris men beräkna ej faktorerna

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{0xx} & -I_{0xy} & -I_{0xz} \\ -I_{0xy} & I_{0yy} & -I_{0yz} \\ -I_{0xz} & -I_{0yz} & I_{0zz} \end{pmatrix}$$

Bra om det blir en diagonal matris! ☺

6. Om 3 är genomförd kommer

$\bar{\omega} = \bar{\Omega}^{xyz/f}$

kroppensrot rel. marken

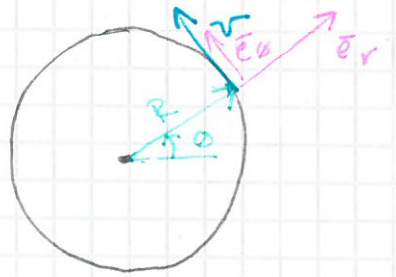
koordrot. rel. marken

7. Sätt in allt i formeln och beräkna!

För beräkningar med två roterande koord syst. se 14*, lektions genomgång.

Bestäm vilket som är ditt fixa system. trixa runt med ω.

Specialfall Cirkelrörelse



R = konstant $\Rightarrow$ $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$

$$\bar{a} = -R\dot{\theta}^2 \bar{e}_r + R\ddot{\theta}\bar{e}_\theta$$

Ibland vill man ha accerellationsvektorn uttryckt i partikelns fart v istället, med $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$

$$\bar{a} = -\frac{v^2}{R}\bar{e}_r + \dot{v}\bar{e}_\theta$$