Föreläsning 4

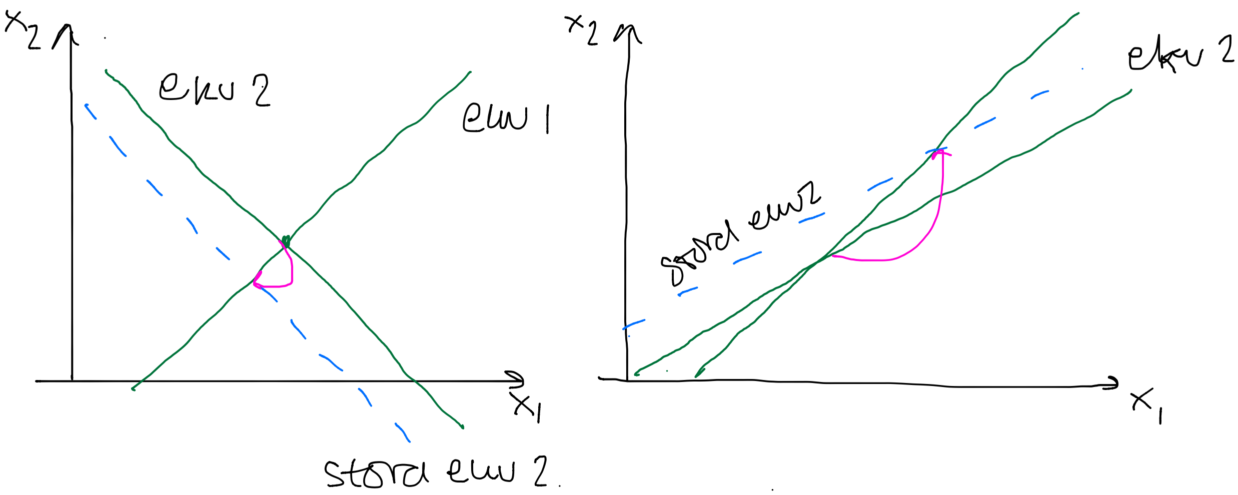
TANA21 – Beräkningsmatematik

Linjära ekvationssystem
Approximation

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Kondition

$Ax = b$, A är 2×2, störning i b.



lösningen ändras inte
ej störningskänslig
välkonditionerat

lösningen ändras mycket.
störningskänsligt
illa konditionerat

För att analysera ett ekvationssystems kondition behövs vektor- och matrisnormer.

Vanliga vektornormer:
(ett tal som uttrycker vektorns storlek.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$ tvånorm = längden.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$ ett-norm

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$ max-norm

Ex:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

normen för

$$\|x\|_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}^{1/2} \approx 3{,}87, \quad \|x\|_1 = 1+2+1+3 = 7, \quad \|x\|_\infty = 3$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

Matrisnorm definieras från vektornorm

$$\|A\| = \underset{x \neq 0}{\text{supremum}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(matrisnormen sägs vara inducerad av vektornormen)

uppfyller $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ och $\|Ax\| \le \|A\| \le \|x\|$

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ maximal radbeloppssumma

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ maximal kolonnbeloppssumma

Ex:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 & 5 & 9 \end{matrix} \end{array} \qquad \text{Hjälp.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 10 \quad \|A\|_1 = 9$$

Konditionstal är $\mathcal{K}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Störningsanalys för $Ax=b$

antag $b = \bar{b} \pm |\Delta b|$, A är exakt

$$\Delta b = \bar{b} - b$$

Vi löser $Ax = \bar{b}$ där $\Delta x = \bar{x} - x$

alltså $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$ där $\underline{Ax=b}$ (1)

$$A \cdot \Delta x = \Delta b$$

$$\underline{\Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b} \quad (2)$$

Vi har (1) $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

(2) $\|\Delta x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta b\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$

multiplicera:

$$\|b\| \cdot \|\Delta x\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\mathcal{K}(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

konditionstal.

* $\mathcal{K}(A)$ är ett mått på hur störningskänsligt $Ax=b$ är.
* Om $\mathcal{K}(A)$ är stort är A illa-konditionerad.
* $\mathcal{K}(A) \ge 1$ ty

$$\sup_{x \ne 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \mathcal{K}(A)$$

enhetsmatrisen

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=1}$$

* Om även A är stora se formelsamlingen.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 2.01 \end{pmatrix} \quad |\Delta b| \leq \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 10^{-2} \\ 0{,}5 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Uppskatta $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. Vi behöver $A^{-1} = \begin{pmatrix} 101 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = (1 + 1.01) \cdot (101 + 100) = 404.01$$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \approx 404.01 \cdot \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{2.01} \approx 1.005.$$

Felet kan vara större än närmevärdet

$$x = \begin{pmatrix} 1 \pm 1.005 \\ 1 \pm 1.005 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 2{,}01 \end{pmatrix} \text{ ger } \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2.005 \\ 2.005 \end{pmatrix} \text{ ger } x = \begin{pmatrix} 2.005 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Approximation

anpassa $f^*(x)$ till data $f(x)$

min $\|f - f^*(x)\|_1$: avvikande datapunkter påverkar lite

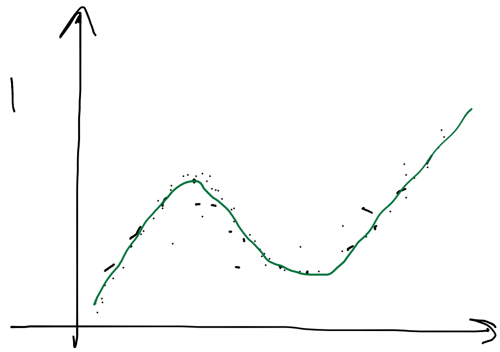
min $\|f - f^*(x)\|_\infty$: avvikande datapunkter påverkar mycket

min $\|f - f^*(x)\|_2$: anpassar sig bra till alla datapunkterna.

Minsta kvadratmetoden

(minimera tvånormen, utjämnar mätfel)

Anpassa ett andragradspolynom till



x	101	102	104	105
y	2	2	3.3	6

$x_{medel} = 103$

ansätt $p(x) = c_0 + c_1(\underbrace{x-103}_{\text{medelv.}}) + c_2(x-103)^2$

stoppa in data:

$p(101) = c_0 - 2c_1 + 4c_2 = 2$

$p(102) = c_0 - 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 2$

$p(104) = c_0 + 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 3.3$

$p(105) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 6$

$\iff A \cdot c = b$ är överbestämt, minimera $\|b - A \cdot c\|_2$

Lösningen ges av normalekvationerna:

$A^T A c = A^T b$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.3 \\ 9.3 \\ 37.3 \end{pmatrix}$$

Lös:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 10 & 13.3 \\ 0 & 10 & 0 & 9.3 \\ 10 & 0 & 34 & 37.3 \end{array}\right)$$

- Pivotering behövs inte ty A^TA är symmetrisk och positivt definit

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = 2.2 \\ C_1 = 0{,}93 \\ C_2 = 0{,}45 \end{cases}$$

Så, $p(x) = 2.2 + 0{,}93(x-103) + 0{,}45(x-103)^2$

Några kommentarer

1) Krav på ansatsens form:

allmänt $f^*(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots c_n\varphi_n(x)$

där c_i är sökta konstanter

$\varphi_i(x)$ är givna linjärt oberoende funktioner. tex:

$1, x, x^2 \dots$

$\sin(x), \cos(x), \sin(2x)$

2, Fördel med ansatsen

Studera konditionen med alternativ ansats

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 101 & 101^2 \\ 1 & 102 & 102^2 \\ 1 & 104 & 104^2 \\ 1 & 105 & 105^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b \qquad B^TB = \begin{pmatrix} 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4{,}5\cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

$11{,}25 \cdot 10^7 \quad \cdot \quad \cdot$

$$\underbrace{\qquad}_{B} \qquad a \qquad (B^T B)^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_\infty(B) \approx 5{,}8 \cdot 10^{15}$

$\mathcal{H}_\infty(A^T A) \approx 54$ (exemplet).

Stort konditionstal medför risk för sämre noggrannhet i lösningen $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

3. $A^T A$ är positivt definit

Definition: för alla $x \neq 0$ är $x^T A x > 0$

Här får vi $x^T A^T A x = (Ax)^T \underbrace{Ax}_{y} = y^T y = y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0$

ty då A har linjärt oberoende kolonner och $x \neq 0$ är $Ax \neq 0$ och $y \neq 0$.