Föreläsning 8

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Väntevärde och varians för linjärkombinationer av s.v.

SATS 5.11

Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara s.v., och låt

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

Då gäller:

(i) $$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b$$

(ii) $$V(Y) = \sum a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{m} a_i a_j C(X_i, X_j)$$

Om $X_1, \dots, X_n$ är oberoende fås:

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$$

Bevis:

Om $n=2$, (X_1, X_2) är kontinuerlig:

(i) $$E(Y) = \{\text{sats } 5.2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + b) f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 =$$

$$= a_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2}_{E(X_1)} + a_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2}_{E(X_2)} +$$

$$+ b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2}_{=1}$$

(ii) $V(Y) = E((Y - E(Y))^2) = E((a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cancel{b} - a_1 E(X_1) - a_2 E(X_2) -$

$- \cancel{b})^2) = E(a_1^2 (X_1 - E(X_1))^2 + a_2^2 (X_2 - E(X_2))^2 +$

$+ 2a_1 a_2 (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) =$

$= a_1^2 E((X_1 - E(X_1))^2) + a_2^2 E((X_2 - E(X_2))^2) +$

$+ 2 a_1 a_2 E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) =$

$= a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + 2 a_1 a_2 C(X_1, X_2)$

B5.22

Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende s.v., sådana att

$$\begin{cases} E(X_i) = 2, & i = 1,2,3 \\ D(X_i) = 3, & i = 1,2,3 \end{cases}$$

Låt

$$Y = 3X_1 - 2X_2 + X_3 - 6.$$

Beräkna $E(Y)$ och $D(Y)$.

Sats 5.11 med

$a_1 = 3, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 1 \Rightarrow$

$E(Y) = 3E(Y) - 2E(Y) + E(Y) - 6 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 - 6 = -2$

$V(Y) = 3^2 V(X_1) + (-2)^2 V(X_2) + 1^2 V(X_3) = \{V(X_i) = 3^2, \; i=1,2,3\} =$

$= 9 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 9 = 126 \Rightarrow$

$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{126} \approx 11{,}2$

SATS 5.7

Låt X vara en s.v., och låt

$$Y = aX + b.$$

Då är

$$E(Y) = aE(X) + b$$
$$V(Y) = a^2 V(X)$$

Bevis:

Sats 5.11, med

$$n = 1, \quad a_1 = a$$

SATS 5.11.3

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende s.v., sådana att

$$\begin{cases} E(X_i) = \mu, & i = 1, 2, \ldots, n \\ V(X_i) = \sigma^2, & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Låt

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \text{"stickprovsmedelvärdet"}$$

Då gäller

$$E(\bar{X}) = \mu$$
$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Bevis:

Sats 5.11, med

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$$
$$b = 0$$

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \underbrace{E(X_i)}_{=\mu} = \frac{\mu}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{\mu}{n} \cdot n = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sum \left(\frac{1}{n}\right)^2 \underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{\sigma^2}{n^2} \cdot n = \frac{\sigma^2}{n}$$

Stora talens lag

SATS 5.13, Markovs olikhet

Låt $Y \geq 0$ vara en s.v., och låt $a > 0$. Då gäller:

$$P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$$

Bevis:

Om Y är kontinuerlig:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_{0}^{a} y\, f_Y(y)\,dy + \int_{a}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy \geq$$
$$\geq \int_{a}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy \geq a \int_{a}^{\infty} f_Y(y)\,dy = a\, P(Y \geq a)$$

SATS 5.14, Tjebysjovs olikhet

Låt X vara en s.v. med

$$E(X) = \mu$$

och

$$V(X) = \sigma^2,$$

och låt $\varepsilon > 0$. Då gäller:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Bevis:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = P(\underbrace{(X - \mu)^2}_{= Y} \geq \underbrace{\varepsilon^2}_{= a}) = \left\{ \begin{matrix} \text{Markovs} \\ \text{olikhet} \end{matrix} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

SATS 5.12, Stora talens lag

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en följd av oberoende s.v., sådana att:

$$\begin{cases} E(X_i) = \mu, & i = 1, 2, \ldots \\ V(X_i) = \sigma^2, & i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Låt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Då gäller:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Bevis:

Vi vet att

$$E(\bar{X}_n) = \mu,$$
$$V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Tjebysjovs olikhet ger:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Betingade sannolikhetsfördelningar

Låt (X, Y) vara en 2-dim diskret s.v. Den betingade sannolikhetsfunktionen för X givet

$$Y = y$$

definieras av:

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\text{för } y \in \mathbb{R} \text{ så att } p_Y(y) > 0)$$

Tolkning:

Ny uppdaterad sannolikhetsfunktion för X, efter att man fått veta att $Y = y$.

Egenskaper:

Samma som "vanliga" sannolikhetsfunktioner!

Tex:

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} p_{X|Y=y}(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \cdot p_Y(y) = 1.$$

Dessutom:

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{P(Y=y)} =$$

$$= P(X=x \mid Y=y)$$

Låt (X, Y) vara en 2-dim kontinuerlig s.v. Den betingade täthetsfunktionen för X givet $Y=y$, definieras av:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(för $y \in \mathbb{R}$ så att $f_Y(y) > 0$)

Tolkning:

Som ovan.

Egenskaper:

Samma "vanliga" täthetsfunktioner! Tex:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x)\,dx = 1.$$

5.31

Låt (X, Y) vara en 2-dim kontinuerligt s.v, med

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna $f_{X|Y=y}(x)$, speciellt för $y = \frac{1}{2}$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \left\{ \begin{matrix} \text{antag} \\ 0 < y < 2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}$$

Vi får

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \left\{ \begin{matrix} \text{antag} \\ 0 < y < 2 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \left(x^2 + \frac{xy}{6}\right) \Big/ \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Om $y = \frac{1}{2}$ får vi:

$$f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{12x^2}{5} + \frac{2x}{5}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Betingat väntevärde och varians

Låt (X, Y) vara en 2-dim s.v. Det betingade väntevärdet för X givet $Y = y$ definieras av:

$$E(X \mid Y = y) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \, p_{X \mid Y = y}(x), & \text{om } (X, Y) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X \mid Y = y}(x) \, dx, & \text{om } (X, Y) \text{ kont.} \end{cases}$$

Den betingade variansen för X givet $Y = y$ definieras av:

$$V(X \mid Y = y) = E((X - E(X \mid Y = y))^2)$$

Vilket är lika med:

$$E(X^2 \mid Y = y) - E(X \mid Y = y)^2$$

SATS 5.15 Lagen om total förväntan

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{Y \in \mathbb{R}} E(X \mid Y = y) \, p_Y(y), & \text{om } (X, Y) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \, f_Y(y) \, dy, & \text{om } (X, Y) \text{ kontinuerlig} \end{cases}$$