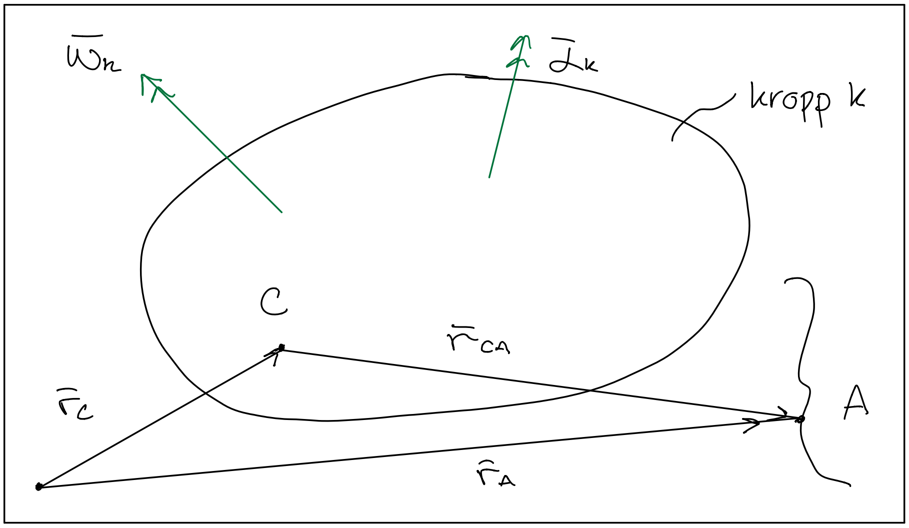
Föreläsning 4

TMME04 – Mekanik II

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/



fix referensram

- C fix punkt i kropp k, A godtycklig punkt.

$$\bar{r}_A = \bar{r}_C + \bar{r}_{CA} \Rightarrow \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_C + \dot{\bar{r}}_{CA} \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{\omega}_k \times \bar{r}_{CA} + \underbrace{\left(\frac{d\,\bar{r}_{CA}}{dt}\right)_k}_{\bar{V}_A/k}} \quad (4)$$

Där $\frac{\bar{V}_A}{k}$ är A:s hastighet relativt kropp k.

$$\ddot{\bar{r}}_A = \ddot{\bar{r}}_C + \ddot{\bar{r}}_{CA} \quad (3)$$

$(3) \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{\alpha}_k \times \bar{r}_{CA} + \underbrace{\bar{\omega}_k \times (\bar{\omega}_k \times \bar{r}_{CA})}_{\omega_k^2 \bar{r}_{CA} \text{ om } \omega_k \perp \bar{r}_{CA}} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{A/k} \\ + \underbrace{\left(\frac{d^2 \bar{r}_{CA}}{dt^2}\right)_k}_{\bar{a}_{A/k}}\end{aligned}} \quad (5)$$

Där $\bar{a}_{A/k}$ är A:s accelerationsvektor relativt kropp k.

$\bar{V}_{A/k}$ och $\bar{a}_{A/k}$ fås genom att man tänker sig ~~att~~ kropp K är fixerad.

Anmärkning:

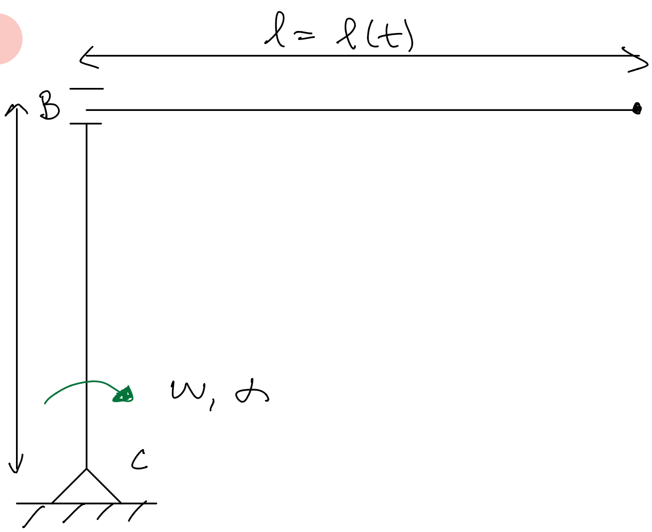
Om väljer teckna $\bar{r}_{CA}$ i koordinatsystem

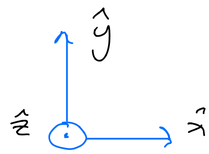
$$\{ O_k, \hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{z}_k$$

fixt i kropp K, får vi

$$\bar{r}_{CA} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$
$$\bar{V}_{A/k} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$
$$\bar{a}_{A/k} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

Ex:





Sökt: $\bar{v}_A$ och $\bar{a}_A$ i avbildade läget

Kropp $k = \boxed{BC}$

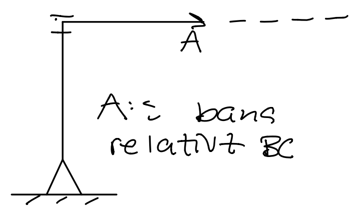
$A = A$

(4) ⇒

$$\bar{v}_A = \overbrace{\bar{v}_C}^{=\bar{0}} + \bar{\omega}_{BC} \times \bar{r}_{CA} + \bar{v}_{A/BC} =$$

gått lika bra med $\bar{v}_B$

$$= -\omega\hat{z} \times (l\hat{x} + h\hat{y}) + \dot{l}\hat{x} = -l\omega\hat{y} + h\omega\hat{x} + \dot{l}\hat{x}$$



$\bar{v}_{A/BC}$, $\bar{a}_{A/BC}$

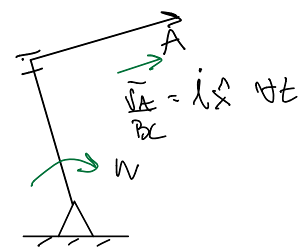
(5) ⇒

$$\bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_C}_{=0} + \underbrace{\bar{\alpha}_{BC}}_{-\alpha_{BC}\hat{z}} \times \bar{r}_{CA} - \omega_{BC}^2 \bar{r}_{CA} + \underbrace{2\bar{\omega}_{BC}}_{-2\omega_{BC}\hat{z}} \times \overbrace{\bar{v}_{A/BC}}^{\dot{l}\hat{x}} + \overbrace{\bar{a}_{A/BC}}^{\ddot{l}\hat{x}} =$$

$$= -l\alpha\hat{y} + h\alpha\hat{x} - l\omega^2\hat{x} - h\omega^2\hat{y} - 2\dot{l}\omega\hat{y} + \ddot{l}\hat{x} \qquad (*)$$

Tolkning av termerna:

- Om teleskoparmen låst (l konst) i $(*)$
- Storleksändring av $\bar{v}_{A/BC}$: $\dot{l}\hat{x}$
- Riktningsändring av $\bar{v}_{A/BC}$:

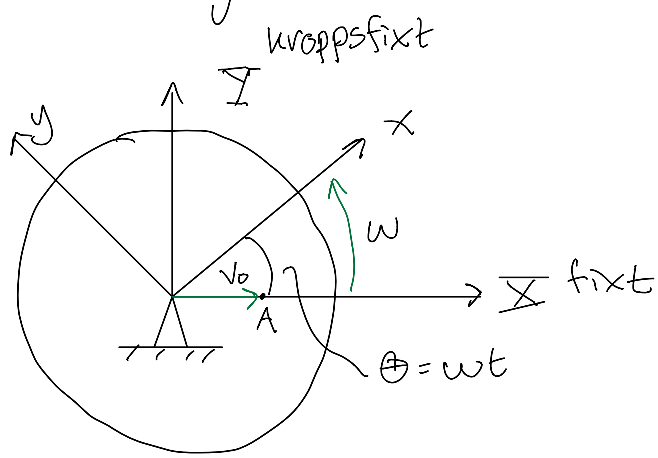


$$\dot{l}\dot{\hat{x}} = \dot{l}(\omega_{BC}\times\hat{x}) = \dot{l}(-\omega\hat{z}\times\hat{x}) = -\dot{l}\omega\hat{y}$$

- Storleksändring av $\bar{r}_{CA}$:

$$-\omega\hat{z}\times\dot{l}\hat{x} = -\dot{l}\omega\hat{y}$$

Ex:



En partikel A rör sig utan friktion på en karusell som roterar med konstant ω.
Plotta A:s läge relativt

a) karusellen

b) marken

$t = 0 \qquad x = y = 0$

$\qquad\qquad \dot{x} = v_0, \ \dot{y} = 0$

a) Newton II $\Rightarrow$

$$\bar F = m\bar a = 0 \quad (\varphi = 0)$$

$$\bar a_A = \underbrace{\bar a_C}_{=0} + \underbrace{\bar\alpha}_{=0} \times \bar r_{CA} - \omega^2 \underbrace{\bar r_{CA}}_{x\hat x + y\hat y} + 2\bar\omega \times \underbrace{\bar v_{A/kar}}_{\dot x\hat x + \dot y\hat y} + \underbrace{\bar a_{A/kar}}_{\ddot x\hat x + \ddot y\hat y} =$$

$$= -\omega^2 x\hat x - \omega^2 y\hat y + 2\omega\dot x\hat y - 2\omega\dot y\hat x + \ddot x\hat x + \ddot y\hat y = \bar 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 x + 2\omega\dot y + \ddot x = 0 \\ -\omega^2 y + 2\omega\dot x + \ddot y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = V_0 t\cos\omega t \\ y = -V_0 t\sin\omega t \end{cases}$$

A:s läge i xyz-systemet:

$$\bar r_A = \underbrace{\bar r_C}_{=0} + \bar r_{CA} = V_0 t\,(\cos\omega t\,\hat x - \sin\omega t\,\hat y) \quad (6)$$

b) A:s läge i XYZ-systemet

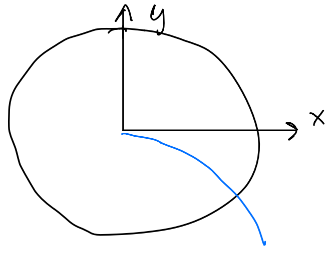
$$\hat x = \cos\omega t\,\hat X + \sin\omega t\,\hat Y$$
$$\hat y = -\sin\omega t\,\hat X + \cos\omega t\,\hat Y$$

Insättning i (6) $\Rightarrow$

$$\bar r_A = V_0 t\,\hat X$$

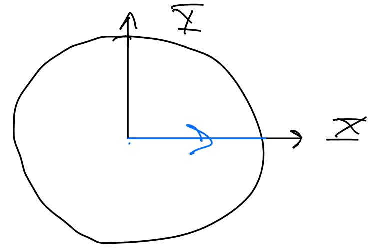
Plotta A:s läge:

Relativt karusellen



Drar åt höger

Relativt marken



Newton II: marken

$$\bar F = m\bar a_A$$

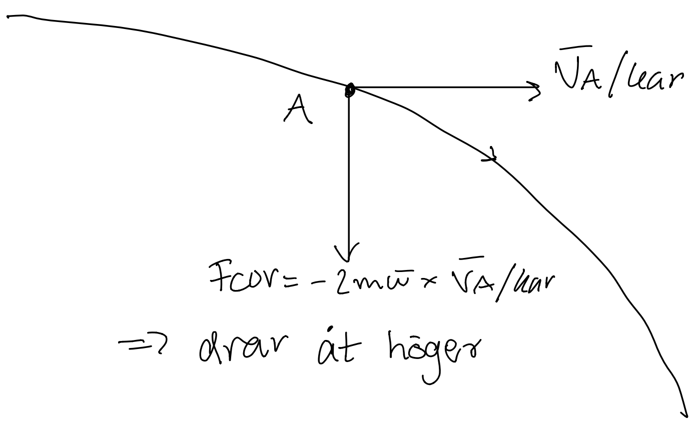
Newton II: karusellen

(5) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\bar F - m\bar a_C - m\bar\alpha \times \bar r_{CA} + \overbrace{m\,\omega^2 \bar r_{CA}}^{\text{centrifugalkraft}} - \overbrace{2\omega\bar\omega \times \bar v_{A}/kar}^{\text{corialiskraft}}}_{\text{fiktiva krafter}} =$$

$$= m\bar a_A/kar$$

Bana relativt karusellen



$\Rightarrow$ drar åt höger