Föreläsning 3

TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

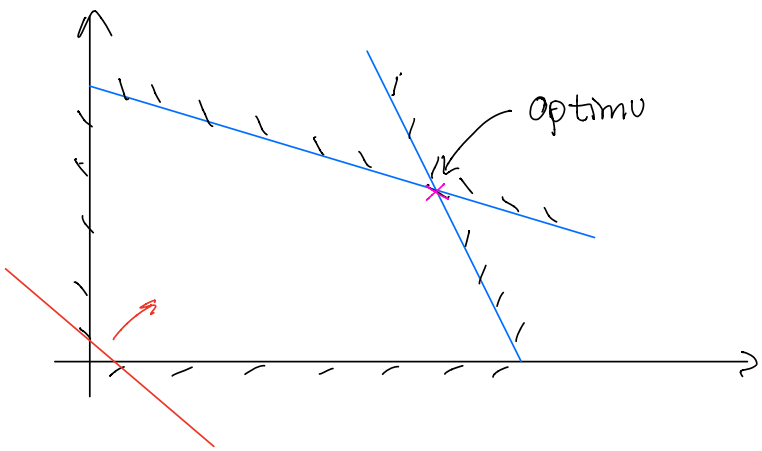
Linjär programmering

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Linjär optimering, forts

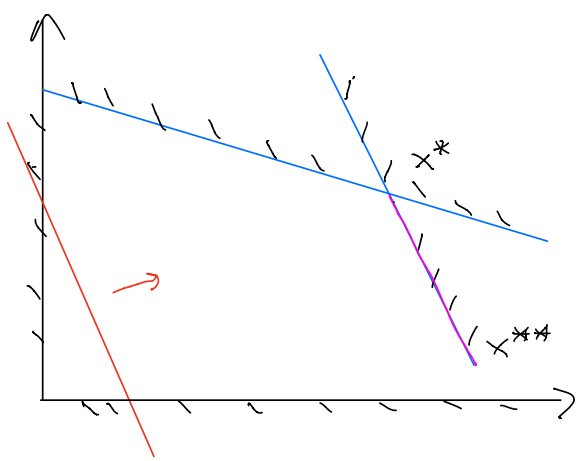
Eller Linjärprogrammering = LP

Två variabler → grafisk lösning



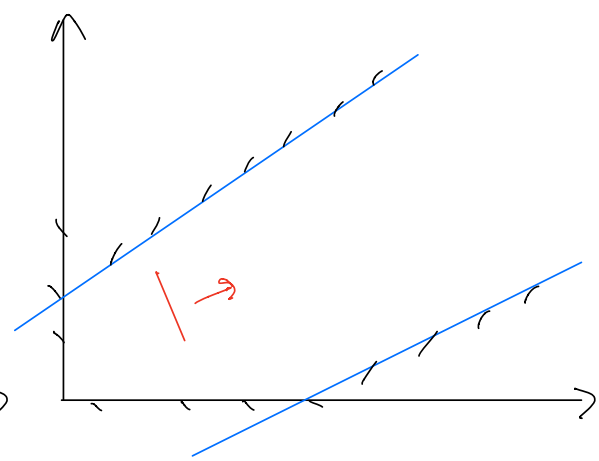
OBS: Optimum i hörnpunkt!

Andra fall:

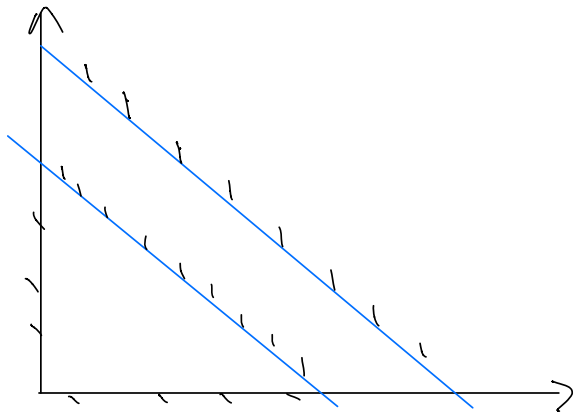


Alternativa optima:

$x = \lambda x^* + (1-\lambda) x^{**}, \lambda \in [0,1]$



Obegränsat optimum



Tillåten lösning saknas.

Varje linjärt optimeringsproblem kan skrivas

$$\min z = c^T x$$
$$\text{da } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

där $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $b \in \mathbb{R}^m$

n - antalet variabler

m - antalet bivillkor

Omskrivningar

$\max z = -\min -z, \iff \max z = \min -z$

$a_i^T x \leq b_i \iff a_i^T x + s = b_i, \quad s \geq 0$

$a_i^T x \geq b_i \iff a_i^T x - s = b_i, \quad s \geq 0$

$x_j \leq 0 \iff x_j^{ny} = -x_j \geq 0$

x_j ej tecken begränsad $\iff x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$

$x_j \geq l_j \neq 0 \iff x_j^{ny} = x_j - l_j \geq 0$

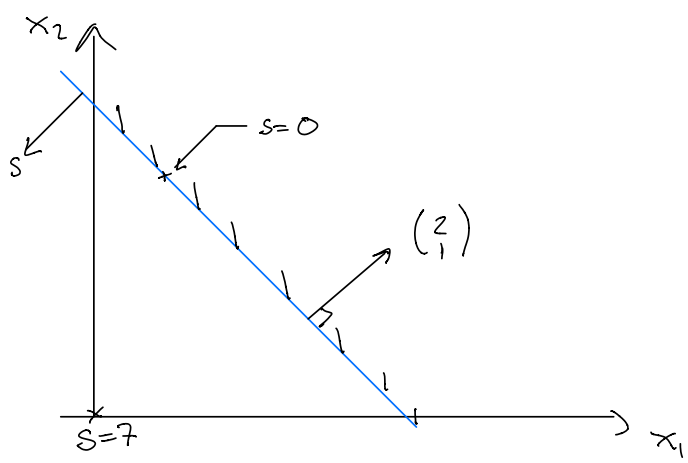
$x_j \leq u_j \neq 0 \iff x_j^{ny} = u_j - x_j \geq 0$

Ex: Slackvariabel, s

$2x_1 + x_2 \leq 7 \iff$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s = 7 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

ty $s = 7 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \iff 2x_1 + x_2 \leq 7$



Ex:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_1^{ny} = -x_1$ och $x_2^{ny} = x_2 - 1$

$$\max \quad x_1^{ny} + x_2^{ny} + 1$$
$$\text{då} \quad -x_1^{ny} + x_2^{ny} \geq 2 - 1$$
$$x_1^{ny} + 2x_2^{ny} \leq 6 - 1$$
$$x_1^{ny}, x_2^{ny} \geq 0$$

$$\Rightarrow \min \; -x_1^{ny} - x_2^{ny} (-1)$$
$$\text{då} \quad -x_1^{ny} + x_2^{ny} - s_1 = 1$$
$$x_1^{ny} + 2x_2^{ny} + s_2 = 4$$
$$x_1^{ny}, x_2^{ny}, s_1, s_2 \geq 0$$

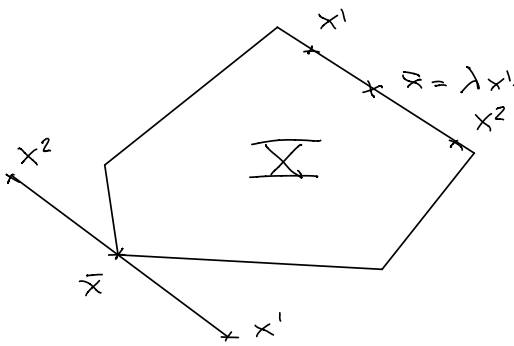
$$\Rightarrow \min \; (-1, -1, 0, 0)x$$
$$\text{då} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; x \geq 0$$

där $x = (x_1^{ny}, x_2^{ny}, s_1, s_2)^T$, $n = 4$, $m = 2$.

Vi vill ha en algebraisk hörnpunkt!

Def:

Ett $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ är en hörnpunkt till mängden X om det inte finns distinkta (olika) $x^1, x^2 \in X$ och $\lambda \in (0,1)$ sådana att $\bar{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$



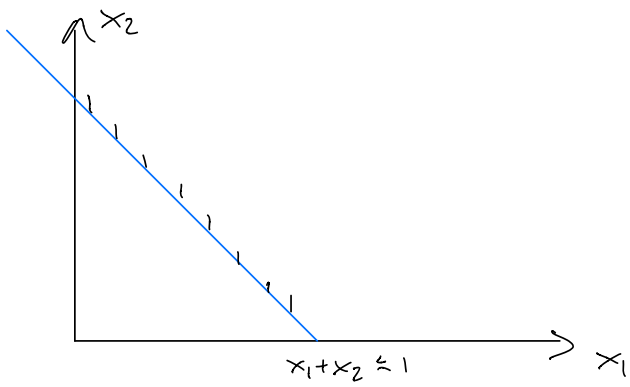
$\bar{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ där $\lambda \in (0,1) \leftarrow$ strikt

$\Rightarrow$ inte hörnpunkt

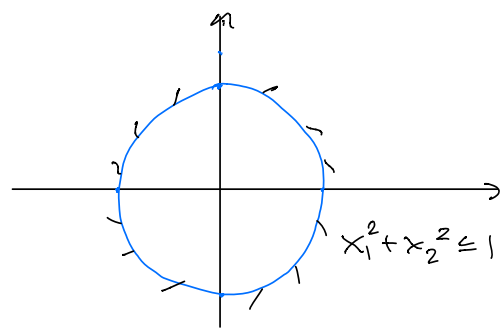
$\bar{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \Rightarrow x^1 \notin X$ eller $x^2 \notin X$

$\Rightarrow$ hörnpunkt

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1 \}$$



Finns inga hörnpunkter



Alla randpunkter är hörnpunkter!

SATS: Optimum i hörnpunkt

Om problemet

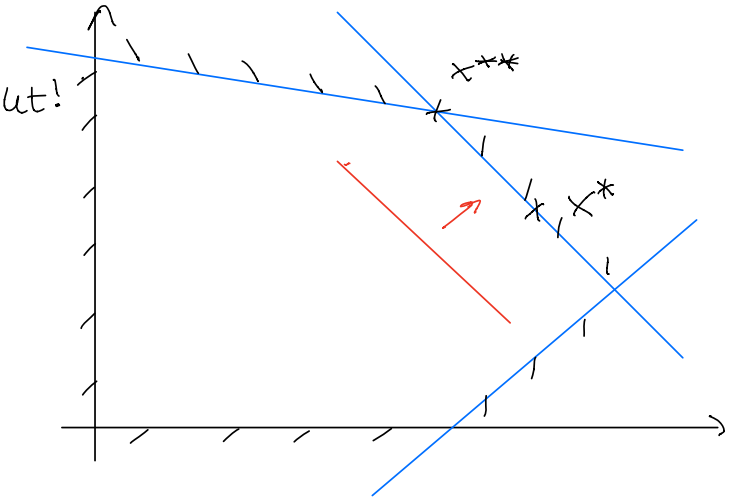
$$z^* = \min z = c^T x$$
$$\text{då } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

har ändligt optimalvärde ($z^* \neq \pm\infty$) så antas

detta i minst en hörnpunkt.

Beviisprincip

Antag att x^* är optimal. Ej hörnpunkt! Då måste x^{**} vara optimal. Är en hörnpunkt.



- Algebraisk motsvarighet till hörnpunkt?
- Algebraiskt metod för att finna en optimal hörnpunkt

Betraktar systemet $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Antas att $m \leq n$, typiskt gäller $m < n$,
och $\text{rang}(A) = m \Rightarrow Ax = b$ har en lösning.
Systemet $Ax = b$ är **underbestämt** med
en $(n-m)$-dimensionell lösningsmängd.

Def:

Ett $\bar{x}$ sådant att $A\bar{x} = b$ är en baslösning om det finns $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ med $|J| = m$ sådan att $\bar{x}_j = 0$ för alla $j \notin J$ och kolumnerna $\{A_j\}_{j \in J}$ är linjärt oberoende.

OBS:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_j = 0 \text{ för alla } j \notin J \\ |J| = m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{högst } m \text{ stycken} \\ \bar{x}_j \neq 0. \end{array}$$

Ex:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

här: $m = 2$, $n = 5$

i) $\bar{x} = (0, 1, 1, -2, 0)$

De j som $\neq 0$.

$\bar{x}_j = 0$ för alla $j \notin J \Rightarrow J \supseteq \{2, 3, 4\}$

$\Rightarrow |J| \geq 3 > 2 = m \Rightarrow$ ej baslösning

ii) $\bar{x} = (1, 1, 0, 0, 0)$

$\bar{x}_j = 0$ för $j \notin J \Rightarrow J \supseteq \{1, 2\}$

$\Rightarrow |J| = 2$

framför x_1

Vidare: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende. Alltså baslösning!

Def:

Om $\bar{x} \geq 0$ gäller för en baslösning så är den **tillåten**

Def:

En baslösning är **degenererad** om $\bar{x}_j = 0$ gäller för något $j \in J$.

- $\bar{x}_j$, $j \in J$, kallas **basvariabler** (m stycken).
- $\bar{x}_j$, $j \in J$, kallas **icke-basvariabler** (n-m stycken, alla med värdet noll).

Hur beräkna en baslösning?

- Välj m basvariabler
- Sätt icke-basvariabler till noll
- Räkna ut värde på basvariablerna
- Unik lösning → baslösning funnen.

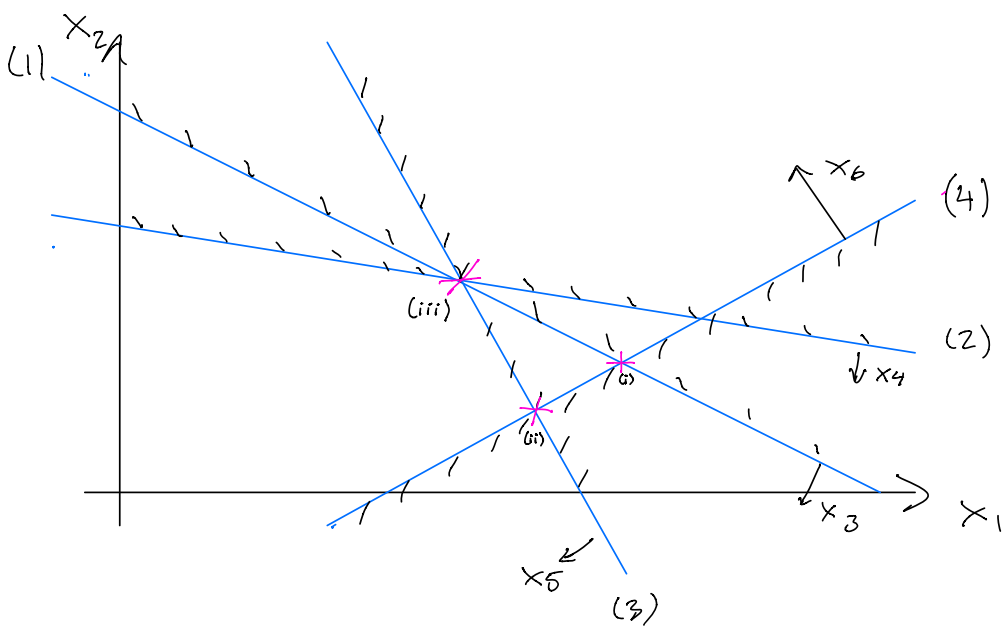
Ex:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 & (2) \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 3 & (3) \\ x_1 - x_2 + x_6 = 1 & (4) \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_6 \geq 0$

x_3, x_4, x_5, x_6 är slackvariabler.

tex $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$ $x_1 + x_2 \leq 2$



i) $J = \{1, 2, 4, 5\}$

$x_3 = x_6 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{2},\ x_5 = -\frac{1}{2}$

Dvs på (1) och (4) tg $x_3 = x_6 = 0$.

baslösning, men otillåten.

ii) $J = \{1, 2, 3, 4\}$

$x_5 = x_6 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = 1$

tillåten baslösning (hörnpunkt)

iii) $J = \{1, 2, 5, 6\}$

$x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 1$

tillåten lösning, degenererad.