Föreläsning 10

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Binomialfördelning

En diskret s.v. X sägs vara binomialfördelad, om:

$$S_X = \{0, 1, \dots, n\},$$

och

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \forall\ x \in S_X \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

Här är

$$\begin{cases} n \text{ heltal}, & n \geq 0 \\ 0 < p < 1 \end{cases}$$

Kodbeteckning

$$X \sim Bin(n, p)$$

SATS 7.1

Låt $A_1, A_2, \dots, A_n$ vara oberoende händelser, sådana att

$$P(A_i) = p \quad \forall\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Låt

$$X = \text{det antal av } A_i\text{:na som inträffar.}$$

Då är $X \sim Bin(n,p)$

Bevis: Se boken

Ex:

Låt en urna innehålla N, kulor, varav v st vita och $s = N - v$ svarta. Dra n st kulor ur urnan, med återläggning. Låt

$$X = \text{antalet vita kulor bland de dragna.}$$

Då är $X \sim Bin(n, p)$, där $p = \frac{v}{N}$.

Bevis:

Låt

$$A_i = \text{"den i:te dragna kulan är vit"}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

A_i:na är oberoende, och

$$P(A_i) = p = \frac{v}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Då är

$$X = \text{det antal av } A_i\text{:na som inträffar}$$

Sats 7.1 $\Rightarrow$ $X \sim Bin(n, p)$

Alternativt bevis, Klassiska sannolikhetsdef.

Vi inser att

$$S_X = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Beräkna

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \forall x \in S_X$$

Ω = alla sätt att dra n kulor, med återläggning, med hänsyn till ordning

Lika sannolika utfall =>

$$P(X = x) = \frac{g(\{X = x\})}{m},$$

där

$$m = N^n, \quad g(\{X = x\}) = \binom{n}{x} \cdot v^x \cdot (N-v)^{n-x}.$$

Vi får att:

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} v^x (N-v)^{n-x}}{N^n} = \binom{n}{x}\left(\frac{v}{N}\right)^x\left(1 - \frac{v}{N}\right)^{n-x}, \quad \forall x = 0, \dots, n$$

B.7.6

a) Låt

$$A_i = \text{"försök nr. } i \text{ lyckas"}, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

A_i:na är oberoende, och

$$P(A_i) = 0.8, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Vi ser att

X = det antal av A_i:na som inträffar

Sats 7.1 $\Rightarrow$ $X \sim Bin(12, 0.8)$

b) Samma resonemang som i del (a). A_i^c:na är oberoende, och

$$P(A_i^c) = 0.2, \quad i = 1, 2, \ldots, 12$$

Y = det antal av A_i^c:na som inträffar.

Sats 7.1 $\Rightarrow$ $Y \sim Bin(12, 0.2)$

c) $$P(2 \le Y \le 4) = \sum_{2 \le y \le 4} p_Y(y) = \sum_{y=2}^{4} \binom{12}{y} 0.2^y (1-0.2)^{12-y} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tabell i F.S.} \\ \text{sid 31} \end{array} \right\} \approx 0.2835 + 0.2362 + 0.1329 \approx 0.65$$

d) $$P(7 < X \le 10) = \sum_{7 < y \le 10} p_Y(y) = \sum_{y=8}^{10} \binom{12}{x} 0.8^x (1-0.8)^{12-x} \approx$$

skriv

$$\approx \{\text{Tabell}\} \approx 0.1329 + 0.2362 + 0.2835 \approx 0.65$$

Samma ty samma händelse

SATS 7.2

Låt

$$X \sim Bin(n, p).$$

Då är:

$$E(X) = np,$$
$$V(X) = np(1-p)$$

Bevis:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \, p_X(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \ldots$$

Alternativt bevis: Indikatorvariabler

Låt $I_1, I_2, \ldots, I_n$ vara oberoende s.v., som antar värdena 0 och 1, sådana att:

$$P(I_i = 1) = p, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Låt

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Då är $X \sim Bin(n, p)$

Beviset:

Låt

$$A_i = \{I_i = 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

A_i:na är oberoende,

$$P(A_i) = p, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

X = det antal av A_i:na som inträffar

$$\text{Sats 5.11} \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i) = \{E(I_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p\} \\ V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(I_i) = \{E(I_i^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \sum_{i=1}^{n} p = np \\ = \sum_{i=1}^{n} (p - p^2) = np(1-p) \end{cases}$$

SATS 7.3

Låt

$$X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p) \quad \text{och} \quad X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$$

lika!

vara oberoende s.v.

Låt

$$Y = X_1 + X_2.$$

Då är

$$Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p).$$

Hypergeometriska fördelningen

En diskret s.v. X sägs vara hypergeometriskt fördelad, om:

$$S_X = \{x \text{ heltal}, \ 0 \leq x \leq Np, \ 0 \leq n - x \leq N - Np\},$$

och

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \forall x \in S_X \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Här är $0 \le n \le N$ heltal, $0 < p < 1$.

Kodbeteckning

$$X \sim Hyp(N, n, p).$$

SATS 7.5

Låt en urna innehålla N kulor, varav v st vita, och $s = N - v$ st svarta. Dra n st kulor på måfå ur urnan, utan återläggning. Låt

$$X = \text{antalet vita kulor bland de dragna.}$$

Då är

$$X \sim Hyp(N, n, p), \quad p = \frac{v}{N}$$

Bevis:

Vi inser att S_X är som ovan beskrivs. Beräkna

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \forall x \in S_X$$

Ω = alla sätt att dra n st kulor av N, utan återläggning, utan hänsyn till ordning.

Lika sannolika utfall $\Rightarrow$

$$p_X(x) = \frac{g(\{X = x\})}{m}, \quad m = \binom{N}{n},$$

$$g(\{X = x\}) = \binom{v}{x} \cdot \binom{N-v}{n-x}.$$

Vi får:

$$P(X=x) = \frac{\binom{Np}{n}\binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \forall x \in S_X$$

Ex:

Dra 4 personer på måfå bland N st, utan återläggning. Andel män (från början) = 0.2. Låt

X = antal män bland de dragna.

Då är

$$X \sim Hyp(N, 4, 0.2)$$

enligt sats 7.5.

a) $N = 10$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - p_X(0) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} =$$

$$= 1 - \frac{8!\,6!\,4!}{4!\,4!\,10!} = \ldots = \frac{2}{3}$$

b) $N = 500$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - p_X(0) = 1 - \frac{\binom{100}{0}\binom{400}{4}}{\binom{500}{4}} =$$

$$= \ldots = 0.5916.$$

SATS 7.6

Låt

$$X \sim Hyp(N, n, p).$$

Då är

$$E(X) = np,$$
$$V(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

Poissonsfördelning

En diskret s.v. X sägs vara Poissonfördelad, om:

$$S_X = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

och

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Här är $\mu > 0$.

Kodbeteckning:

$$X \sim Po(\mu)$$

"Tumregeln"

Låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vara oberoende händelser, så att

$$P(A_i) = p, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Låt

$$X = \text{det antal av } A_i\text{:na som inträffar}$$

Om p är "litet" och n är "stort", så är

$$X \approx Po(\mu), \quad \mu = np.$$

SATS 7.7

Låt

$$X \sim Po(\mu).$$

Då är

$$E(X) = V(X) = \mu$$

SATS 7.8

Låt

$$X_1 \sim Po(\mu_1)$$
$$X_2 \sim Po(\mu_2)$$

vara oberoende s.v. Låt

$$Y = X_1 + X_2.$$

Då är

$$Y \sim Po(\mu_1 + \mu_2).$$

8.25

Låt

X_i = antal fibrer i en viss punkt på garnet, tillhörande tråd nr i, $i=1,2,3$

X_i:na är oberoende, och $X_i \sim Po(3)$, $i=1,2,3$.

Låt

$$Y = X_1 + X_2 + X_3.$$

SATS 7.8 $\Rightarrow$

$$Y \sim Po(3+3+3) = Po(9).$$

$$P(7<Y<12) = \sum_{7<Y<12} p_Y(y) = \sum_{y=8}^{n} \frac{e^{-9} 9^y}{y!} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Tabell i F.S} \\ \text{sid 36} \end{array} \right\} =$$

$$= 0.1318 + 0.1318 + 0.1186 + 0.097 \approx 0.4792.$$