Uppgifter 1

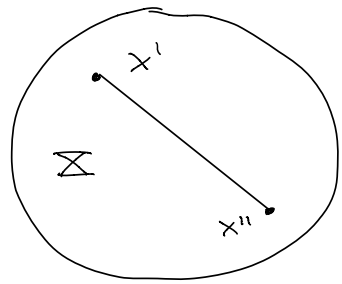
TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Lektionsgenomgång

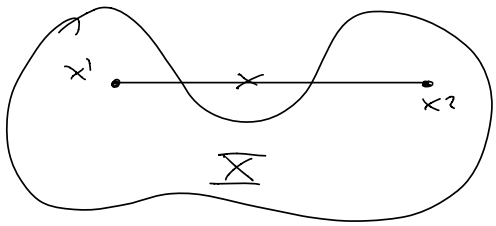
$\forall\ x', x'' \in X$

$[x', x''] \in X$



Konvex

$[x', x''] = \{x : x = \lambda x' + (1-\lambda) x'',\ 0 \le \lambda \le 1$

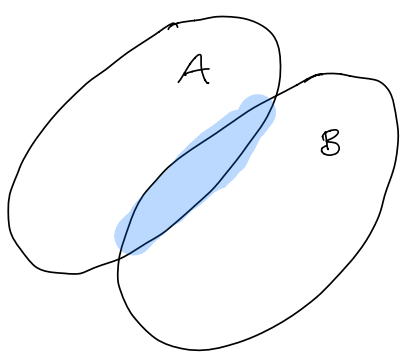


Icke-konvex

$g(x)$ konvex funktion $\Rightarrow X = \{x : g(x) \le b\}$ ($\ge b$)
(konkav)

är konvex

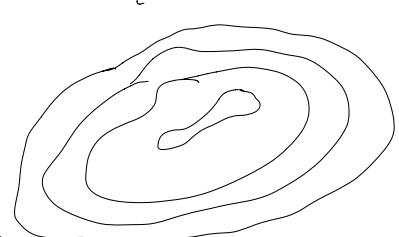
A, B är konvexa $\Rightarrow A \cap B$ är konvex



Level sets. Labb!

$L(c) = \{x : f(x) \le c\}$

icke-konvex.



$f(x) = x^3$ inte konvex ; $\mathbb{R}^1$

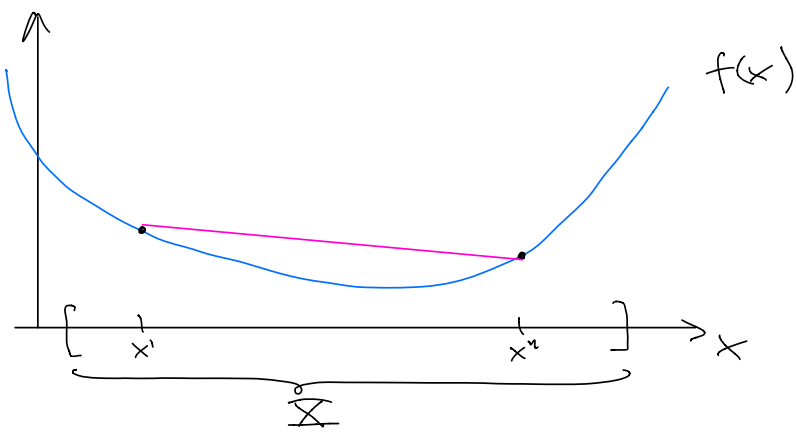
$f(x) \le 1 \iff x \le 1$

Def:

$f(x)$ är konvex på ett konvext X om

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \le \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'')$$

$$\forall x', x'' \in X, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$



Inga konkava X.

1) $f(x)$ är konvex om $f''(x) \ge 0$
2) $f_1(x)$, $f_2(x)$ är konvexa $\Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = F(x)$ konvext.
3) $f(x)$ är konvex, $\lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda f(x) = F(x)$ konvex.
4) $h(y)$, $g(x)$ konvexa, $h(y)$ är en icke-negativ funktion

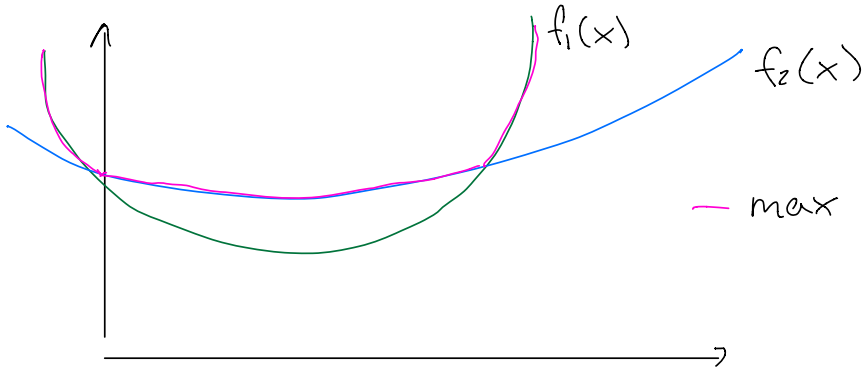
$y \in R^1$ $\quad$ $x \in R^n$

då

$$F(x) = h(g(x)) \text{ konvex.}$$

5) $f_1(x)$ och $f_2(x)$ konvexa

$$F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \text{ konvexa}$$



Def:

Problem $\underset{x \in X}{\overset{(\max)}{\min}} f(x)$ kallas konvex om

1) X är konvex
2) $f(x)$ är konvex (konkav) funktion på X

③

a) $\ln x$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(\ln x) = -\frac{1}{x^2}$$

Icke-konvex!

b) e^x är konvex

c)

$$\frac{d}{dx}(\ln(1+e^x)) = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(\ln(1+e^x)) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{1+e^x} =$$

$$= \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{1+e^x} > 0$$

Konvex!

d) $x \ln x$ $\quad \frac{d}{dx}(x \ln x) = \ln x + 1 \qquad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow$ konvex

e) $e^{-x^2/2}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) = -xe^{-x^2/2}$$

$$\frac{d^2}{dx} = -e^{-x^2/2} + (-x \cdot -x)e^{-x^2/2} = (x^2-1)e^{-x^2/2}$$

icke-konvex $x<1$ $\Rightarrow$ icke-konvex.

f) $4x_1 + x_2^3 + \frac{1}{x_1} + 2x_2 \ln x_2$ for $x_1, x_2 \geq 0$

$f(x_1) = 4x_1 + \frac{1}{x_1}$ konvex

$f(x_2) = x_2^3 + 2x_2 \ln x_2$ konvex

$\Rightarrow F(x)$ konvex

g) $F(x_1, x_2) = 2e^{x_1} - \sqrt{x_1} - 5x_2 - 3\ln x_2$ $x_1, x_2 \geq 0$

$f(x_1) = 2e^{x_1} - \sqrt{x_1}$ $f(x_2) = -5x_2 - 3\ln x_2$

$\frac{d}{dx_1} f(x_1) = 2e^{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}$ $\frac{d^2}{dx^2} f(x_1) = 2e^{x_1} + \frac{1}{2(x_1)^{3/2}}$

$\frac{d}{dx_2} f(x_2) = -5 - \frac{3}{x_2}$ $\frac{d^2}{dx_2^2} f(x_2) = \frac{3}{x_2^2}$

$\Rightarrow F(x_1, x_2)$ konvex!

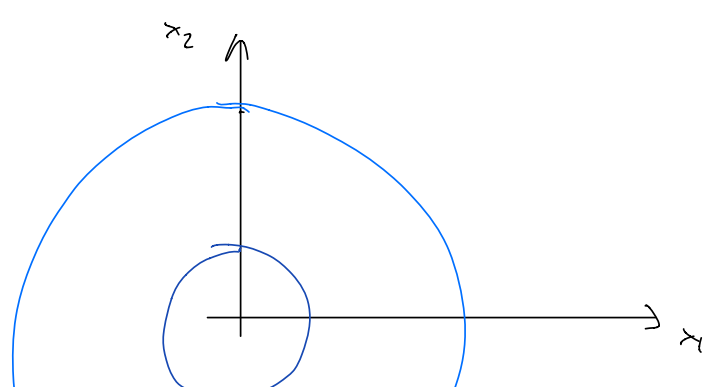
4, 5, 6, 15

4

a) $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

$x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{4}$

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ uppfyller båda



$x_1 = -1$, $x_2 = 0$ uppfyller båda

Punkt mellan

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $\quad 0 + 0 \not\geq \frac{1}{4}$

Så icke-konvex.

b) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{men} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 1$$

c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 \leq 5, & (1) \quad A \\ x_1^2 - x_2 \leq 10 & (2) \quad B \\ x_1, x_2 \geq 0 & \quad C \end{cases}$$

$x_2 \leq \sqrt{5 - x_1}$

$x_2 \geq 10 - x_1^2$

$\frac{d}{dx}(1) = 2x_2 \quad \frac{d^2}{dx^2} = 2$ konvex mängd

$\frac{d}{dx}(2) = 2x_1 \quad \frac{d^2}{dx^2}(2) = 2$ konvex mängd

$A \cap B \cap C$ konvext.

d)
$$\begin{cases} \overbrace{x_1 - x_2^2}^{g(x)} \geq 1 & \text{konkav men } g(x) \geq 1 \Rightarrow \text{konvex} \\ x_1^3 + x_2^2 \leq 10 & \text{konvex} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 & \text{konvex} \\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0 & \text{konvex} \end{cases}$$

$A \cap B \cap C \cap D.$

(5) $x \geq 0$

$f(x) = x^p$ för vilka p är f konvex?

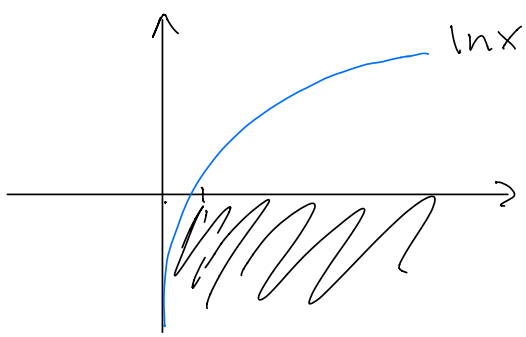
$\frac{d}{dx} f(x) = p x^{p-1}$ $\quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = p(p-1)\, x^{p-2}$

$p(p-1)\, x^{p-2} > 0$

$\underline{\underline{p \leq 0 \text{ och } p \geq 1}}$

(6) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkav,

$\{x \mid h(x) \leq 0\}$ alltid icke-konvex?



$h(x) = \ln x$, $h(x \leq 1) \leq 0$

Är konvex för alla $\ln x$, $x \leq 1$

(13) $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$f: X \to \mathbb{R}$ vara konvexa

$$\min f(x) \quad \text{då } x \in X$$

a) f, g konvexa funktioner $\Rightarrow F(x)$ konvex

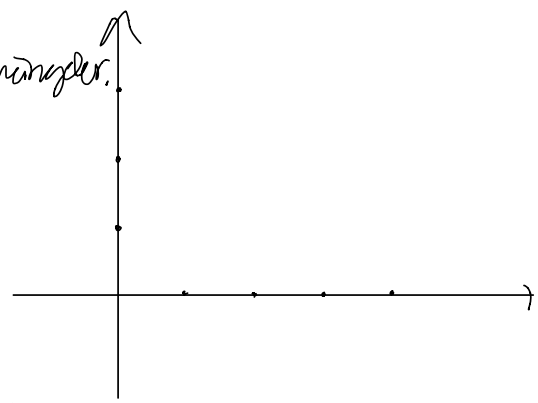
b) $x^2 - e^x$ där x^2, e^x konvexa men $\underbrace{-e^x}_{\text{konkav}}$. Ej konvext

c) linjär funktion både konkav och konvex

$\Rightarrow$ väljer konkav så får vi konvex mängd

d) Ej konvext

Diskreta mängder.



e) Ingen är konvex då vi kommer få separata mängder

f) $g(x)$ konvex då $g(x) \leq 0$ då $g: X \to \mathbb{R}$

g) $g(x)$ icke-konvex

(14)

$$\min z = c^T x$$
$$\text{då } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$$z = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lektionsgenomgång

20

Bensinsort	Minsta ångtryck	Maximalt ångtryck	Efterfrågad volym (ton)
Regular	90	10	10
Premium	95	8	25

Bensinsort	Tillgång (ton)	Oktanantal	Ångtryck (mbar)	Kostnad kr/ton
Butan	12	120	60	1500
Tungnafta	15	75	4	2400
Katalytisk retor.	25	100	2,6	3000

	Butan	Tungnafta	Katalytisk ref.
Regular	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Premium	x_{21}	x_{22}	x_{23}

$x_{ij} \geq 0$

$i = 1, 2$

$j = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} \leq 12 \\ x_{12} + x_{22} \leq 15 \\ x_{13} + x_{23} \leq 25 \end{cases}$$

$$120 \cdot \frac{x_{11}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}} + 75 \frac{x_{12}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}} + 100 \cdot \frac{x_{13}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}} \geq 90$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 120 \cdot x_{11} + 75x_{12} + 100x_{13} \geq 90(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \\ 120 \cdot x_{21} + 75x_{22} + 100x_{23} \geq 95(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2{,}6 \cdot x_{12} \leq 10\,(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \\ 60 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 2{,}6 \cdot x_{23} \leq 8\,(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} \geq 10 \quad (=10) \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \geq 25 \quad (=10) \end{cases}$$

Minimera:

$$1500(x_{11}+x_{21}) + 2400(x_{12}+x_{22}) + 3000(x_{13}+x_{23})$$

25 $112\,m^2$

	Utrymme (m^2/enhet)	Arbetsbehov (h/vecka/enhet)	Vinst exklusive arbetskostnad. (kr/enhet)
Kyckling	1,2	3	1300
Ankor	1	2	860
Kalkoner	0,8	1	440

Kycklingar: 28
Ankor: 18

12 <u>veckor</u>!

Kalkoner: 8

Arbetstimmar: 200h /vecka
Kostnad: 30kr/h

Övertid: 45h /vecka
Kostnad: 35kr/h

Kycklingar	Anker	Kalkoner
x_1	x_2	x_3

$x_i, y_j \geq 0$
$i = 1,2,3$
$j = 1,2$

Arbetstimmar	Övertid
y_1	y_2

Utrymme:

$$1{,}2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0{,}8 \cdot x_3 \leq 112$$

Tid

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - y_1 - y_2 \leq 1$$

Arbetstimmar

$$\begin{cases} y_1 \leq 200 \\ y_2 \leq 45 \end{cases}$$

Maximize: (max z)

$$1300x_1 + 860x_2 + 440x_3 - 12(30y_1 + 35y_2)$$

(26)

a)

Veckodag	Mån	Tis	Ons	Tors	Fre	Lör	Sön
Antal	17	13	15	19	14	16	11
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

x_i: antal personer som börjar den dagen

$x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 \geq 17$ $\qquad x_i \geq 0$

$\vdots$ $\qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$, heltal

$$\min z = \sum_{i=1}^{7} x_i$$

b) Genom att = ger det inte heltalslösning.

(28)

Vecka	Producerad C_1	Producerad C_2	Önskad mängd	Lagrat
1	$\cancel{x_{11}}\ x_i$	$\cancel{x_{21}}\ y_i$	b_1	w_1
2	x_{12}	x_{22}	b_2	w_2
3	x_{13}	x_{23}	b_3	w_3
4	x_{14}	x_{24}	b_4	w_4
5	x_{15}	x_{25}	b_5	w_5
6	x_{16}	x_{26}	b_6	$\underline{w_6}$
				0

$$\min z = \sum_{i=1}^{6} c_1 x_{1i} + \sum_{j=1}^{6} c_2 x_{2j} + \sum^{6} p\, w_i$$

då $$\sum_{j=1}^{i} (x_j + y_j) - w_i = \sum_{j=1}^{i} b_j$$

$x_i \le K, \quad y_i \le 0{,}4K, \quad w_i \le L, \quad w_6 = 0$

$x_i, y_i, w_i \ge 0$

38

$$\max \; z = 7x_1 + 5x_2$$

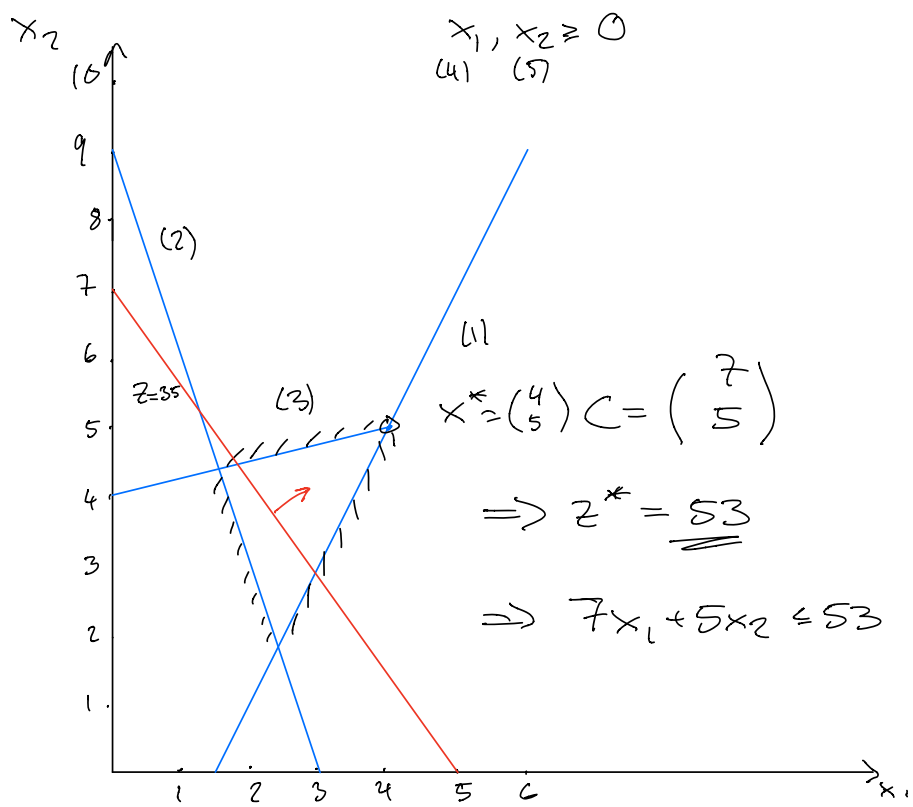
đã

$$2x_1 - x_2 \le 3 \quad (1)$$

$$3x_1 + x_2 \ge 9 \quad (2)$$

$$-x_1 + 4x_2 \le 16 \quad (3)$$

$$\underset{(4)}{x_1}, \underset{(5)}{x_2} \ge 0$$



$$x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z^* = \underline{\underline{53}}$$

$$\Rightarrow 7x_1 + 5x_2 \le 53 \quad \blacksquare$$