Lektion 11

TAMS24 – Statistisk teori

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Lektionsgenomgång

Test av given fordelning

Uppgift

Låt $p_1, \dots, p_r$ vara r reella tal i intervallet $[0,1]$ med

$$\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$$

Vi vill pröva om en s.v. Z antar värdena $z_1, \dots, z_r$ med sannolikhet

$$P(Z = z_j) = p_j$$

1. $$\begin{cases} H_0: P(Z = z_j) = p_j, \quad j = 1, \dots, r \\ H_1: \text{inte } H_0 \end{cases}$$

2. Simulera Z n gånger

Beteckna x_j : # utfall z_i, $i = 1, \dots, r$

$$t = \sum_{j=1}^{r} \frac{(x_j - np_j)^2}{np_i}$$

3. $$C = [\chi^2_\alpha(r-1), \infty)$$

Obs:

Testet fungerar bra om $np_i \geq 5$ för alla i;

Om $np_{m+1} < 5$ så slår man ihop observationer för z_{m+1} med z_m.

Om k parametrar måste skattas (13.34) så är

$$C = [\chi^2_\alpha(n-k-1), \infty)$$

Homogenitetstest (ekvivalent Oberoendetest)

Uppgift:

Antag att man har s diskreta s.v $Z_1, \ldots, Z_s$ som kan anta värdena $z_1, \ldots, z_s$. Vi vill pröva om $Z_1, \ldots, Z_s$ har samma fördelning.

1. $\begin{cases} H_0: Z_1, \ldots Z_s \text{ har samma fördelning} \\ H_1: \text{inte } H_0 \end{cases}$

2. Simulera Z_i n_i gånger.

Beteckna x_{ij}: # utfall z_j, $j = 1, \ldots, r$

Låt

$$A_j = \{\text{utfall är } z_j\}$$

Kontingenstabell

Serie	A_1	A_2	...	A_r	Antal
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1r}	n_1
⋮					
s	x_{s1}	x_{s2}	...	x_{sr}	n_s
Summa	$x_{.1}$	$x_{.2}$	...	$x_{.r}$	n

$$t = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \frac{(x_{ij} - n_i p_j^*)^2}{n_i p_j^*}, \quad p_i^* = \frac{x_{ij}}{n}$$

Obs: $n_i p_j = \dfrac{\text{radsumma}(i) \cdot \text{kolumnsumma}(j)}{n}$

(3) $C = [\chi^2_\alpha (r-1)(s-1), \infty)$

13.32.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ≥
Frekvens	42	23	10	11	8	2	3	1	0

Stokastisk variabel ffg-fördelad, $p = 1/2$, 100 observationer

$$\begin{cases} H_0: X \sim ffg(\frac{1}{2}) \\ H_1: \text{Inte } H_0. \end{cases}$$

$$p_i = \underbrace{(1 - \tfrac{1}{2})}_{\text{framgång}} (\tfrac{1}{2})^{i-1} = 2^{-i}, \quad i < 9$$

$P_9 = 2^{-8}$ för att summan ska bli 1

$1 - (2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-8}) = 2^{-8}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	≥9	
Obser. frekv.	41	23	10	11	8	2	3	1	0	100
Hypotes	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-8}	1
Förväntat np_i	50	25	12.5	6.25	3.125	1.5625	0.78	0.39	100	100

$np_i < 5$ slås samman för att öka det förväntade antalet

		1	2	3	4	≥5	
x_i	Obser. frekv.	41	23	10	11	14	100
p_i	Hypotes	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-4}	1
np_i	Förväntat np_i	50	25	12.5	6.25	6.25	100

$$TS = \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(x_1 - np_1)^2}{np_1} + \dots + \frac{(x_5 - np_5)^2}{np_5} = 15.16 = q$$

$$C = \left[\chi_{0.05}(5-1), \infty\right) = [9.49, \infty)$$

$q = 15.16 > \chi^2_{0.05}$ så förkastar vi H_0.

13.35 h

$n = 500$ trafikolyckor, $\alpha = 1\%$.

Skador	Antalet olyckor då säkerhetsbälte användes	icke användes
Inga / lätt personska.	101	143
Svåra personska.	58	198

$\begin{cases} H_0: \text{Påverkar skadetyp} \\ H_1: \text{Inte } H_0. \end{cases}$

$$P_{11} = \frac{101+143}{500} \cdot \frac{101+58}{500} \approx 77.592 \quad P_{21} = \frac{169}{500} \cdot \frac{58+198}{500} = 81.408$$

$$P_{12} = \frac{259}{500} \cdot \frac{143+198}{500} \approx 166.408 \quad P_{22} = \frac{58+198}{500} \cdot \frac{143+198}{500} = 174.592$$

$np_{ij} \geq 5$. Ja!

$$TS = \frac{(x_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}} = \frac{(x_{11} - np_{11})}{np_{11}} + \ldots + \frac{(x_{22} - np_{22})}{np_{22}} =$$

$= 20.2 = q$

$$C = [\chi^2_{0.01}(2-1)(2-1), \infty) = [\chi_{0.01}^2(1), \infty) = [6.64, \infty)$$

$\chi_{0.01} < q \Rightarrow H_0$ förkastas

13.34

$n = 81$ vardagar, $\alpha = 5\%$.

$\begin{cases} H_0: X \sim Po(\mu) \\ H_1: \text{Inte } H_0 \end{cases}$

Antal bilar	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
Antal dagar	14	12	25	16	10	3	1	0

Under 10 min, 9:00, 9:10

$X \sim Po(\mu)$

$$\mu_{obs}^{*} = 0 \cdot \frac{14}{81} + 1 \cdot \frac{12}{81} + 2 \cdot \frac{25}{81} + \frac{3 \cdot 16}{81} + \frac{4 \cdot 10}{81} + 5 \cdot \frac{3}{81} +$$

$$+ \frac{6 \cdot 1}{81} + 7 \cdot \frac{0}{81} = 2.1111$$

$$(p_i)^{*}_{obs} = \left(\frac{\mu^{*}_{obs}}{i!}\right)^{i} e^{-\mu^{*}_{obs}}$$