Föreläsning 12

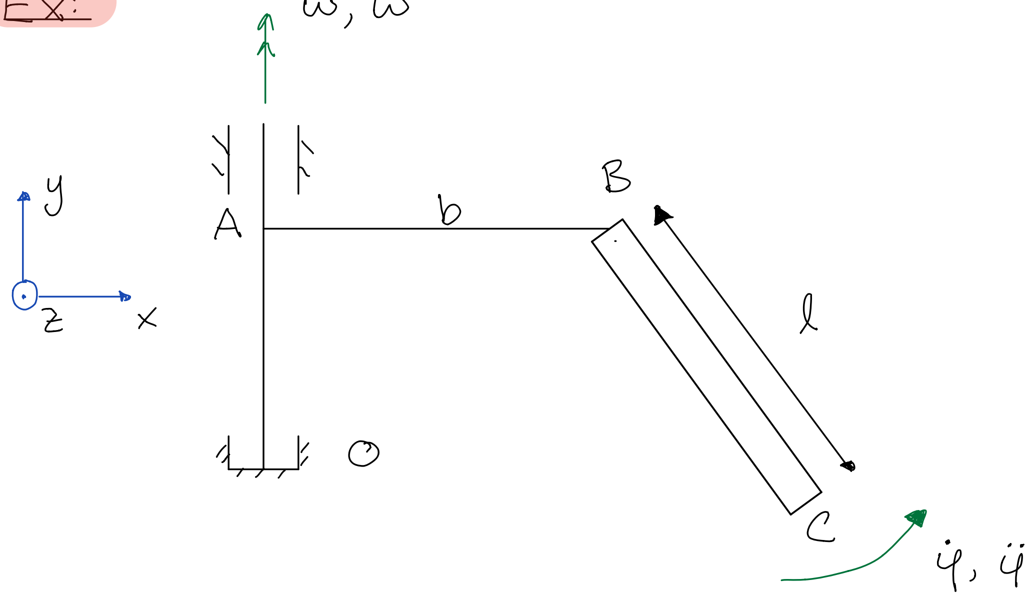
TMME04 – Mekanik II

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

$$\bar{a}_{j/i} \overset{(1)}{=} \left(\frac{d\omega_{j/i}}{dt}\right)_i$$

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_i \overset{(4)}{=} \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_j + \bar{\omega}_{j/i} \times \bar{V}$$

Ex: – innan se föreläsningsslides



Bestäm $\bar{V}_C$ och $\bar{a}_C$ för det avbildade läget

Kalla, marken kropp 0. (alltid)

armen AB kropp 1

stången BC kropp 2

Armen AB:

$$\bar{V}_B = \big/\text{cirkelrörelse}\big/ = -b\omega\hat{z}$$

$$\bar{a}_B = -b\dot{\omega}\hat{z} - b\omega^2\hat{x}$$

Stången BC:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{BC}$$

där

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_{2/0} = \bar{\omega}_{2/1} + \bar{\omega}_{1/0} = \dot{\varphi}\hat{z} + \omega\hat{y}$$

$$\therefore \quad \bar{v}_C = -b\omega\hat{z} + (\omega\hat{y} + \dot{\varphi}\hat{z}) \times l(\sin\varphi\,\hat{x} - \cos\varphi\,\hat{y}) =$$

$$= l\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{x} + l\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{y} - (b + l\sin\varphi)\omega\hat{z}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{\alpha}_2 \times \bar{r}_{BC} + \bar{\omega}_2 \times (\omega_2 \times \bar{r}_{BC})$$

där

inte $\bar{\alpha}_{2/1}$

$$\bar{\alpha}_2 \overset{(1)}{=} \left(\frac{d\omega_{2/0}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\bar{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_0 + \underbrace{\left(\frac{d\bar{\omega}_{1/0}}{dt}\right)_0}_{\bar{\alpha}_{1/0}} =$$

$$\overset{(4)}{=} \underbrace{\left(\frac{d\omega_{2/1}}{dt}\right)_1}_{\alpha_{2/1}} + \bar{\omega}_{1/0} \times \omega_{2/1} + \bar{\alpha}_{1/0} =$$

$$= \ddot{\varphi}\hat{z} + \omega\hat{y} \times \dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\omega}\hat{y}$$

$$\therefore \quad \bar{a}_C = \left(l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l(\omega^2 + \dot{\varphi}^2)\sin\varphi - b\omega^2\right)\hat{x} +$$

$$+ \left(l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\hat{y} - \left(l\dot{\omega}\sin\varphi + 2l\omega\dot{\varphi}\cos\varphi + b\dot{\omega}\right)\hat{z}$$

3D-Kinetik

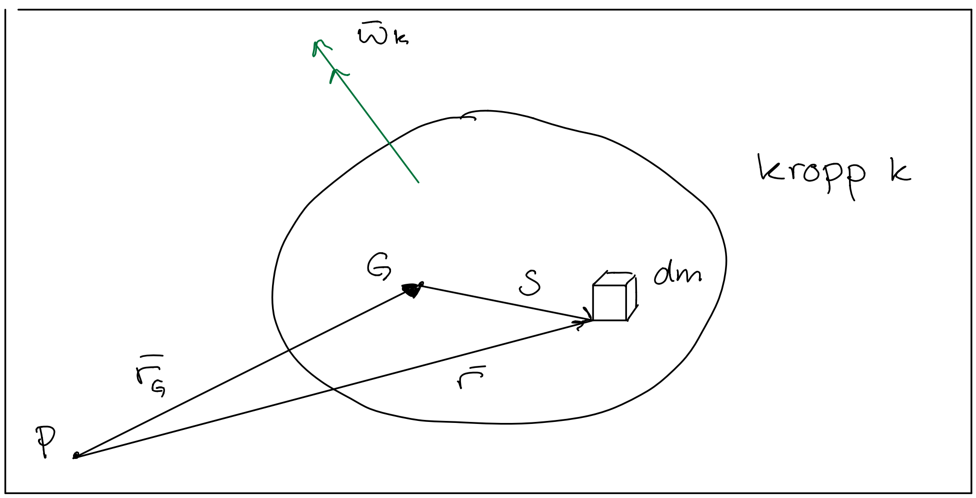
Euler I

$$\bar{F} = m\bar{a}_G$$

Euler II, masscentrum

$$\bar{M}_G = \dot{\bar{h}}_G \quad (1) \qquad\qquad 2D: \bar{h}_G = I_G \bar{\omega}$$

$\bar{h}_G$?



i-ram, kropp 0

Har visat:

$$\bar{h}_G = \left(\int s^2\, dm\right)\bar{\omega}_k - \int \bar{s}\,(\bar{s}\cdot\bar{\omega}_k)\, dm$$

Tensorer

$\bar{E}$: $\bar{E}a = a$

$\bar{a}\otimes\bar{b}$: $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\,(\bar{b}\cdot\bar{c})$

Vidare, se slides.

Med enhetstensorn

$$\bar{E} : \bar{\omega}_k = \bar{E}\,\bar{\omega}_k$$

Och tensorprodukten

$$\bar{s} \otimes \bar{s} : \bar{s}\,(\bar{s} \cdot \bar{\omega}_k) = (\bar{s} \otimes \bar{s})\,\bar{\omega}_k$$

$$\bar{h}_G = \underbrace{\left(\int (s^2 \bar{E} - \bar{s} \otimes \bar{s})\, dm \right)}_{\bar{I}_G,\ \text{tröghetstensor map } G} \bar{\omega}_k \qquad (2)$$

I ett givet koordinatsystem Gxyz tecknas (2)

$$[\bar{h}_G] = [\bar{I}_G][\bar{\omega}_k], \qquad (3)$$

där

$$[\bar{h}_G] = \begin{bmatrix} h_{Gx} \\ h_{Gy} \\ h_{Gz} \end{bmatrix}, \quad [\bar{\omega}_k] = \begin{bmatrix} \omega_{kx} \\ \omega_{ky} \\ \omega_{kz} \end{bmatrix},$$

$$[\bar{I}_G] = \int \left(s^2 \underbrace{[E]}_{\text{enhetsmatrisen}} - [\bar{s}][\bar{s}]^T \right) dm, \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}$$

$[\bar{I}_G]$ kallas för masströghetsmatrisen map koordinatsystemet Gxyz.

Ofta slarvar vi och skriver (3) som

$$\bar{h}_G = \bar{I}_G\,\bar{\omega}_k$$

dvs vi använder samma beteckning för kolonnmatriser/matriser och motsvarande vektorer/tensorer

OBS: $\bar{I}_G$ och därmed även $[\bar{I}_G]$ är, till skillnad från I_G i 2D, i allmänhet tidsberoende.

$$\bar{M}_G = \dot{\bar{h}}_G = (\bar{I}_G \bar{\omega}_k)^{\cdot}, \quad \dot{\bar{I}}_G \neq \bar{0} \, !$$

Åtgärd:
Använd O'Briens ekvation på Euler II för kropp k och derivera i referensram (= kropp) r i vilken $\bar{I}_G$ är konstant, $\left(\frac{d\bar{I}_G}{dt}\right)_r = 0$,

dvs att $[\bar{I}_G]$ blir konstant för ett koordinatsystem Gxyz fixt för kropp r.

Valet r = k fungerar alltid (ger $\left(\frac{d\bar{s}}{dt}\right)_k = \bar{0}$ och $[\bar{s}]$ konstant).

$$\boxed{\bar{M}_G = \left(\frac{d\bar{h}_G}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\bar{h}_G}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_r \times \bar{h}_G, \quad \bar{h}_G = \bar{I}_G \bar{\omega}_k}$$