Föreläsning 7

TANA21 – Beräkningsmatematik

Ordinära differentialekvationer

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Test av aritmetisk komplexitet, p

- tiden $t(n) \approx c \cdot n^p$
  antas bero på antalet beräkningar.
- Tabell

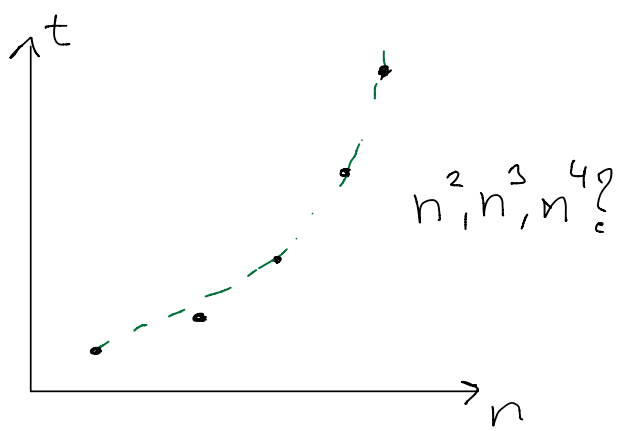
n	$t(n)$	$t(2n)/t(n)$
400	0,12	3,75
800	0,45	3,8
16 000	1,71	

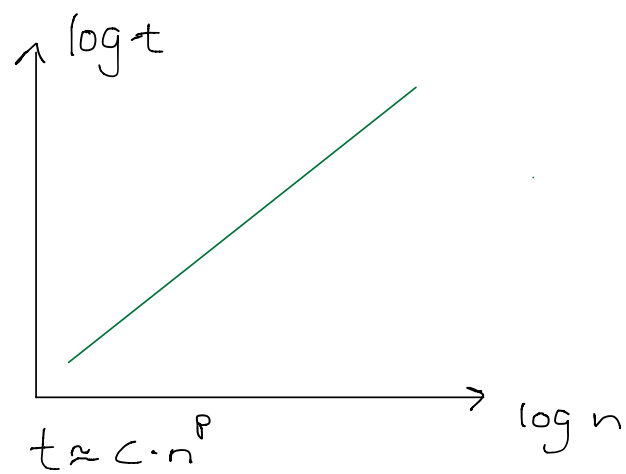
$$\frac{t(2n)}{t(n)} \approx \frac{c(2n)^p}{c \cdot n^p} = 2^p$$

$\rightarrow 4 = 2^2$

Vilket tyder på $p=2$.

- Graf





$t \approx c \cdot n^p$

$\log t \approx \log c + p \cdot \log n$

lutningen ger p.

Ordinära differentialekvationer

Vi ska lösa diff.ekv av ordning ett med begynnelsevärde.

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(a) = c$$

alla prim (y')

eller system av dessa tex

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + v^2(x) \, , & u(a) = C_1 \\ v'(x) = u(x) \cdot v(x) + x \, , & v(a) = C_2 \end{cases}$$

som kan skrivas med vektornotation.

$$y' = f(x,y) \text{ där } y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ och}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u + v^2 \\ u \cdot v + x \end{pmatrix}$$

Högre ordningens diff.ekv kan skrivas om som system av första ordningen

Ex:

$$y'' + 3y + 2y = 1$$

$$y(a) = C_1 \quad , \quad y'(a) = C_2$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \overbrace{1 - 2y - 3y'}^{f(x,y,y')}$$

Skrivas om som system av första ordningen!

Sätt:

$$\begin{cases} u(x) = y(x) \\ v(x) = u'(x) \end{cases}$$

Derivera:

$$\begin{cases} u' = \cancel{y'} = v & u(a) = C_1 \\ v' = \cancel{y''} = 1 - 2u - 3v & v(a) = C_2 \end{cases}$$

P.s.s om $y'' = f(x, y, y', y'')$.
Sätt:

$$\begin{cases} u(x) = y(x) \\ v(x) = y'(x) \\ w(x) = y''(x) \end{cases} \quad \text{ger} \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = f(x, u, v, w) \end{cases}$$

Vissa $f(x,u,v)$ tex $f(x,u,v) = \begin{pmatrix} v \\ -2u-3v+1 \end{pmatrix}$
Kan skrivas på matrisform:

$$f(x,u,v) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} = Ay + b$$

SATS (Picard)

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = C \qquad a < x \leq b$$

f Lipschitz $\Rightarrow$ entydig lösning

Def:

En funktion $f(x,y)$ är Lipschitzkontinuerlig på $[a,b]$ om det finns en konstant L så att

$$|f(x,y)-f(x,\tilde{y})| \le L\cdot|y-\tilde{y}| \quad \text{för } a<x\le b \text{ och } -\infty<y,\tilde{y}<\infty$$

Ex:

$$y'=y+x, \quad 0<x\le 1$$

$$y(0)=1$$

dvs $f(x,y)=y+x$

$$|f(x,y)-f(x,\tilde{y})| = |y+x-(\tilde{y}+x)| = |y-\tilde{y}|$$

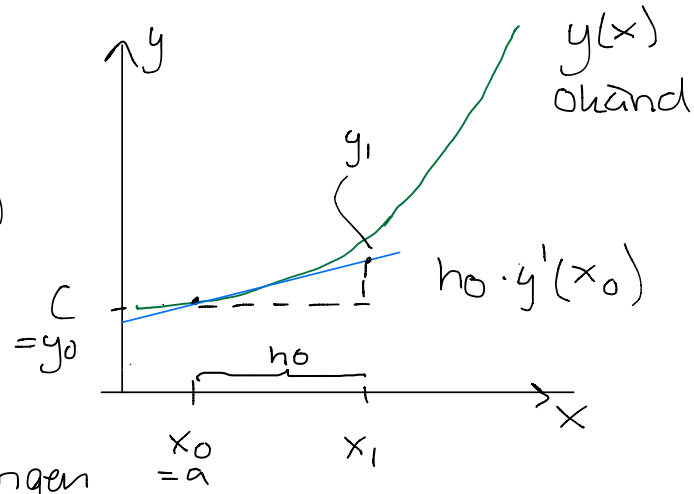
så Lipschitz med $L=1$, entydig lösning.

Euler framåt

Givet

$$y'(x)=f(x,y(x))$$

$$y(a)=c$$



Gå i tangentriktningen $y'(x_0)$.

$$y_1 = y_0 + h_0\cdot y'(x_0)$$

eller

$$u_{i+1} = u_i + h_i\cdot f(x_i, y_i) \quad i=0,1,2\ldots$$

y_{i+1} y_i i

y_{i+1} kan beräknas direkt mha explicit tidsstegning.

Alternativ:

Approximera $y'(x_i)$ med framåtdifferens

$$\underbrace{y'(x_i)}_{f(x_i,y_i)} \approx \frac{\overbrace{y(x_i+h_i)}^{y_{i+1}} - \overbrace{y(x_i)}^{y_i}}{h_i}$$

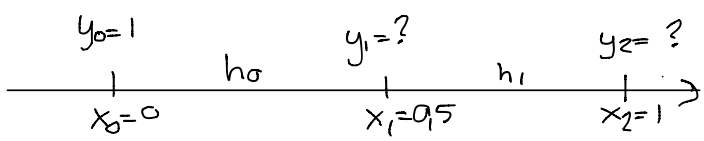
och skriv om.

Ex

$$y' = y, \qquad 0 \le x \le 1$$
$$y(0) = 1$$

dvs $f(x,y) = y$, $C = 1$ (exakt lösning $y = e^x$)

Lös med Euler framåt med $h_0 = h_1 = 0{,}5$



$$y_1 = y_0 + h_0 f(x_0, y_0) = y_0 + h_0 \cdot y_0 = 1{,}5 \approx y(0{,}5)$$

$$y_2 = y_1 + h_1 \cdot f(x_1, y_1) = y_1 + h_1 \cdot y_1 = 2{,}25 \approx y(1)$$

jämför med $y(0{,}5) \approx 1{,}65$, $y(1) \approx 2{,}72$

Mindre h behövs!

Hur bra (dålig) är Euler framåt?

Låt $h_i = h$

Lokalt trunkeringsfel: $l_{i+1} - y(x_i + h)$

efter ett steg och $y_i = y(x_i)$

$$l_i = \underbrace{y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}_{\text{Euler}} - y(x_i + h)$$

Taylor

$$y(\cancel{x_i}) + h \cdot \cancel{y'(x_i)} - \left(y(\cancel{x_i}) + h \cdot \cancel{y'(x_i)} + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \dots\right) =$$

$$= -\frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) - \dots \approx C \cdot h^2 = O(h^2)$$

Vilket ger globalt trunkeringsfel

$$e_i = y_i - y(x_i) = O(h^1), \quad i = 2, 3 \dots$$

ty $e_i \sim$ antalet steg $\cdot h^2 \sim \frac{x_i - x_0}{h} \cdot h^2 \sim h^1$

Generellt:

$$l_i = O(h^{p+1}) \text{ ger } e^i = O(h^p)$$

Def:

En metod är konvergent om om $\|e_i\| \to 0$ (globala trunkeringsfelen)

då $h \to 0$.

Vanliga normer är $\|e\|_\infty = \max_i |e_i|$ maxnorm

$\|e\|_n = |e_n|$ felet i sista punkten.

Def:

Noggrannhetsordningen är p om $\|e\| = O(h^p)$

Ex Euler för

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

h	$\|e\|_\infty$	$\|e(2h)\|_\infty / \|e(h)\|_\infty$
0,5	0,4683	1,69
0,25	0,2769	1,82
0,125	0,1525	$\searrow 2^1$

Noggrannhetsordningen verkar vara 1, vilket stämmer!

Dålig metod ty felet minskar med 2^1, dvs långsamt.

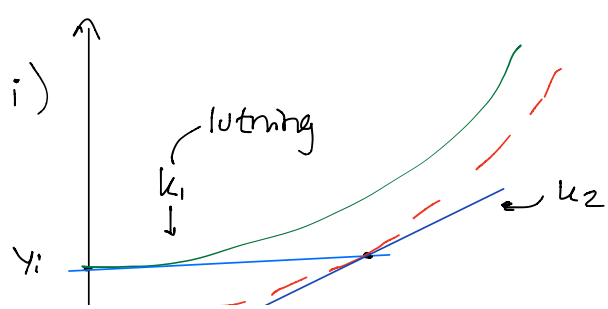
Heuns metod

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = c$$

Vi kan skriva Euler framåt: $y_{i+1}^E = y_i + h_i \cdot \overbrace{f(x_i, y_i)}^{k_1}$

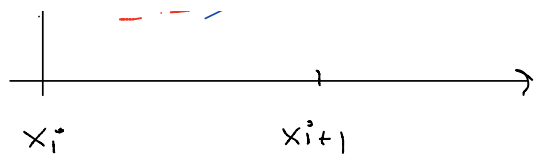
Beräkna:

- k_1, tangenten i (x_i, y_i) ger y_i^{E+1}
- k_2, tangenten i



(x_{i+1}, y_{i+1})

och ta medelvärdet.



Heun:

- $k_1 = f(x_i, y_i)$
- $k_2 = f(x_i + h_i, y_i + h_i \cdot k_1)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}(k_1 + k_2)$

Ex:

$y' = y, \; y(0) = 1$

$0 \le x \le 1$

Låt $h_0 = h_1 = 0{,}5$ med Heun: $(y_0 = 1, f(x,y) = y)$

$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1$

$k_2 = f(x_0 + h_0, y_0 + h_0 \cdot k_1) = f(0{,}5, 1{,}5) = 1{,}5$

$y_1 = y_0 + \frac{h_0}{2}(k_1 + k_2) = 1{,}625 \quad x_1 = 0{,}5$

Så $y(0{,}5) \approx 1{,}625$

$y(1) \approx 2{,}64$

Några Runge-Kutta-metoder:

Globalt trunkeringsfel

- Euler: $k_1 = f(x_i, y_i)$

  $y_{i+1} = y_i + h_i \cdot k_1$ $\qquad O(h^1)$

- Heun $k_1 =$

  $k_2 =$ se ovan

$y_{i+1} =$ $\qquad\qquad O(h^2)$

- Klassisk Runge-Kutta:

$k_1 =$

$k_2 =$

$k_3 =$ se over

$k_4 =$

$y_{i+1} =$ $\qquad\qquad O(h^3)$