Föreläsning 7

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Väntevärde

Väntevärdet av en s.v. $\mathbb{X}$ definieras av:

$$E(\mathbb{X}) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{X}} x\, p_{\mathbb{X}}(x), & \text{om } \mathbb{X} \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\mathbb{X}}(x)\,dx, & \text{om } \mathbb{X} \text{ kontinuerlig} \end{cases}$$

Tolkning:

Lägesmått, "tyngdpunkt", medelvärde i det långa loppet

Ex 1: Diskret

Låt

$\mathbb{X}$ = resultatet av ett tärningskast

$S_{\mathbb{X}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$

x	1	2	3	4	5	6
$p_{\mathbb{X}}(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\, p_{\mathbb{X}}(x) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+\ldots+6) = \frac{7}{2}$$

Ex 2: Kontinuerligt

Låt

$\mathbb{X} \sim \exp(\lambda)$

dvs,

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} +$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} = 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

SATS 5.1

Låt X vara en s.v., och låt

$$Y = g(X).$$

Då är

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x)\, p_X(x), & \text{om } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx, & \text{om } X \text{ kontinuerlig} \end{cases}$$

SATS 5.2

Låt (X, Y) vara en 2-dim s.v, och låt

$$Z = g(X, Y).$$

Då är

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y), & \text{om } (X, Y) \text{ är diskreta.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & \text{om } (X, Y) \text{ är kont.} \end{cases}$$

B.5,7

Låt

$$X \sim \exp(2),$$

dvs

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Låt

$$Y = e^X = g(X)$$

Beräkna $E(Y)$. Sats 5.1 $\Rightarrow$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^x 2e^{-2x}\,dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2$$

Alternativ lösning:

Använd "allmänna metoden". Bestäm först fördelningsfunktionen, F_Y. Vi vet att

$$P(Y > 1) = 1.$$

Fall 1 ($y \leq 1$):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$$

Fall 2 ($y > 1$):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) =$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\ln y} 2e^{-2x} = \left[-e^{-2x}\right]_0^{\ln x} = 1 - e^{-2\ln y} =$$

$$= 1 - \frac{1}{y^2}.$$

Alltså:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ 1 - \frac{1}{y^2}, & y > 1 \end{cases}$$

Sedan fås

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{2}{y^3}, & y > 1. \end{cases}$$

Tillslut

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_1^{\infty} y \cdot \frac{2}{y^3}\,dy = \left[-\frac{2}{y}\right]_1^{\infty} = 2.$$

6.14

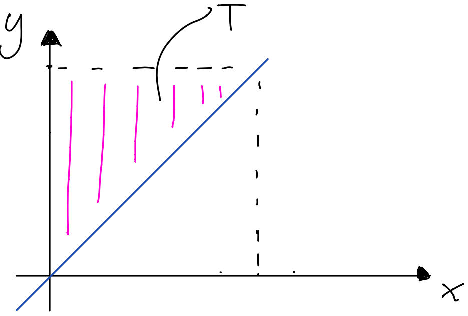
(X, Y) är en 2-dim s.v, med

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/\text{area}(T) = 1 / 1/2 = 2, & (x,y) \in T \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna $E(X, Y)$

Sats 5.2 $\Rightarrow$

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$



$$= \iint_T 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^1 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\left[y\right]_x^1 dx =$$

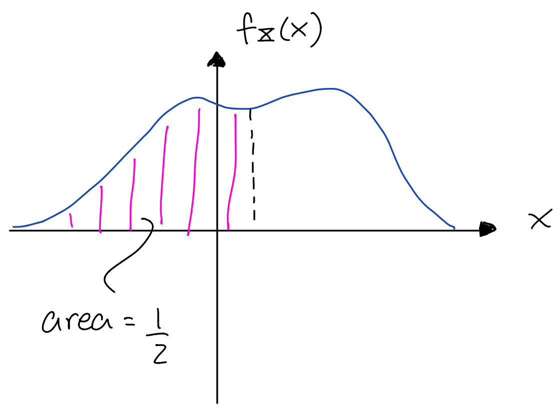
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Median

Medianen för en s.v. X är lösningen m till ekvationen:

$$P(X \le m) = \frac{1}{2}.$$

OBS: m existerar ej alltid



Ex:

Låt

$$X \sim \exp(\lambda).$$

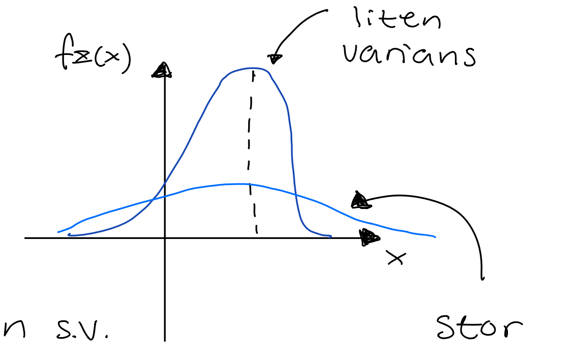
$$P(X \le m) = \int_0^m \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \ldots = 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda} \neq$$

$$\neq E(X)$$

Varians (och standardavvikelse)

Variansen för en s.v. X definieras av:

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$



Tolkning:

Spridningsmått

Standardavvikelsen för en s.v. X definieras av:

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

SATS 5.6

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Bevis:

Om X är kontinuerlig.

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \overset{\text{SATS 5.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + E(X)^2 - 2E(X)x)\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx +$$

$$+ E(X)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx}_{=1} - 2E(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{=E(X)} =$$

$$= E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Ex 1:

Låt

$\mathbb{X}$ = resultatet av ett tärningskast

$S_{\mathbb{X}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

x	1	2	3	4	5	6
$p_{\mathbb{X}}(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Vet att

$$E(\mathbb{X}) = \frac{7}{2}.$$

$$E(\mathbb{X}^2) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 p_{\mathbb{X}}(x) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}$$

$$\Rightarrow \quad V(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E(\mathbb{X})^2 = \frac{96}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Ex 2:

Låt

$$\mathbb{X} \sim \exp(\lambda).$$

Vi vet att

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E(\mathbb{X}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathbb{X}}(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} +$$

$$+ \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x}\, dx = 0 + \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx}_{= E(\mathbb{X}) = 1/\lambda} =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Kovarians

Kovariansen mellan två s.v X och Y definieras av

$$C(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Tolkning

Grovt mått på samvariation (beroende)

SATS 5.8

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Bevis: liknar bevis för sats 5.6

6.14 forts.

$$E(X) = \{\text{sats } 5.2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1\int_x^1 2x\,dy\,dx = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \ldots = \frac{2}{3}$$

Alltså:

$$C(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

SATS 5.4

Om X och Y är oberoende s.v, så är

$$E(X\,Y) = E(X)E(Y)$$

och således

$$C(X,Y) = 0$$

OBS: omvändning gäller ej!

Bevis:

Om (X,Y) är kontinuerlig:

$$E(X,Y) = \{\text{sats } 5.2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \{\text{oberoende}\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy =$$

$$= E(X)E(Y)$$

Relationskoefficienten:

För två s.v X och Y definieras av:

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

SATS:

Det gäller att

$$|\rho(X,Y)| \leq 1,$$

och

$$\rho(X, Y) = \pm 1$$

om och endast om

$$Y = aX + b,$$

där

$$\operatorname{sgn}(a) = \rho(X, Y)$$