Lösningsgång

TANA21 – Beräkningsmatematik

Tenta – 2015-10-26

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

(1) a) $a = \underbrace{151{,}026}_{\bar{a}} \pm 0{,}072$

$|\Delta a| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-t} \quad t > 0$

$\Rightarrow |\Delta a| = 0{,}072 = 0{,}072 \cdot 10^{0} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-t}$

Så,

0 wd.

$3 - 0 = \underline{\underline{3}}$ signifikanta siffror.

b) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \dfrac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$

$= \dfrac{1+x-1+x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \dfrac{2x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$

top notch!

c) $\underline{\underline{2}}$

d) Vid interpolation med polynom med hög gradtal kan stora fel uppstå vid intervallens ändpunkter.

e) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 7 & -15 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} (1)\cdot 0{,}4 + (2) \\ (1)\cdot -0{,}7 + (3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -11{,}5 & 8 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0 \\ -0{,}7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $x = 5606 \quad y = 3055 \quad xy = 17126330$

bas 10, 3 decimaler exp: −9 och 9

$1{,}712 \cdot 10^{7}$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2{,}5 & -1 \\ 1 & 0{,}5 & 0 \\ -12 & -8 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 24{,}76 \\ -37{,}38 \\ 32{,}11 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \mathcal{K}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \quad \text{där}$$

$$\mathcal{K}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 9 \cdot 23 = 207$$

$$\|\Delta b\|_\infty = 0{,}005$$

$$\|b\|_\infty = 37{,}38$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0{,}0276\ldots \approx 0{,}03$$

3)

x	0	0,25	0,5
$f(x)$	1,65	1,75	1,83

a) kubisk spline, $f_1''(0) = 0$ och $f_2''(0{,}5) = 0$

$$\begin{cases} s_1'(x) = 0{,}42 - 0{,}64x \\ s_2'(x) = 0{,}36 - 0{,}48(x - 0{,}25) + 0{,}96(x - 0{,}25)^2 \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} -0{,}64 \\ -0{,}48 + 1{,}82(x-0{,}25) \end{cases}$$

Där både $S_1''(0)$ och $S''(0{,}5) \neq 0$.

Ingen naturlig spline.
Testa även

$S_1'(0{,}25) = 0{,}26$ och $S_2'(0{,}25) = 0{,}36$.
Har ej kont. derivator.

b) $\int_0^{0{,}5} f(x)\,dx$

$h = 0{,}25$

$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \Rightarrow \frac{0{,}25}{3}(1{,}65 + 4 \cdot 1{,}75 + 1{,}83) =$

$= \underline{\underline{0{,}8733\ldots}} \approx 0{,}87$

fel. $|\Delta x| = 0{,}005$

$\Rightarrow \frac{0{,}25}{3} \cdot 6 \cdot 0{,}005 = \underline{\underline{0{,}0025}}$

c) $f'''(0{,}25)$

Newton:

$$p(x) = c_1 + c_2(x-0) + c_3(x-0)(x-0{,}25)$$

$$p(0) = c_1 \qquad = 1{,}65$$
$$p(0{,}25) = c_1 + 0{,}25c_2 \qquad = 1{,}75$$
$$p(0{,}5) = c_1 + 0{,}5\,c_2 + 0{,}125\,c_3 = 1{,}83$$

$$c_1 = 1{,}65$$
$$c_2 = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$$

$$c_3 = \frac{1{,}83 - 1{,}65 - 0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}125} = -0{,}16$$

$$p(x) = 1{,}65 + 0{,}4(x-0) - 0{,}16\underbrace{(x-0)(x-0{,}25)}_{x^2 - 0{,}25x}$$
$$p'(x) = 0{,}4 - 0{,}16(2x - 0{,}25)$$
$$p''(x) = -0{,}32$$

$$f''(0{,}25) \approx D_+D_-f(x) = \frac{f(0) - 2f(0{,}25) + f(0{,}5)}{0{,}25^2} = -0{,}32$$

$$\Delta x = 0{,}005 \Rightarrow \frac{4 \cdot 0{,}005}{0{,}25^2} = 0{,}32$$

vilket är $|\Delta z| \lesssim \left|\frac{\Delta a}{h^2}\right| + \frac{|2\Delta b|}{h^2} + \frac{|\Delta c|}{h^2} = \frac{4\varepsilon}{h^2} \dots$

(4)

x	8	9	11	12
$f(x)$	1,65	1,75	1,83	1,72

a) $f(8,8)$ med kvadratisk interpolation

Newton?

$$p(x) = C_1 + C_2(x-8) + C_3(x-8)(x-9)$$

$$p(8) = C_1 = 1,65$$
$$p(9) = C_1 + C_2 = 1,75$$
$$p(10) = C_1 + 3C_2 + 6C_3 = 1,83$$

$$C_1 = 1,65$$
$$C_2 = 0,1$$
$$C_3 = \frac{1,83 - 1,65 - 3 \cdot 0,1}{6} = -0,02$$

$$\Rightarrow p(x) = 1,65 + 0,1(x-8) - 0,02(x-8)(x-9)$$

$$p(8,8) = 1,65 + 0,1 \ldots = \underline{\underline{1,7332}}$$

b) $p(x) = C_0 + C_1(x-10) + C_2(x-10)^2$

$$A \begin{cases} p_1(8) = C_0 - 2C_1 + 4C_2 = 1,65 \\ p_2(9) = C_0 - C_1 + C_2 = 1,75 \\ p_3(11) = C_0 + C_1 + C_2 = 1,83 \\ p_4(12) = C_0 + 2C_1 + 4C_2 = 1,78 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1,65 \\ 1,75 \\ 1,83 \\ 1,78 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}65 \\ 1{,}75 \\ 1{,}83 \\ 1{,}78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}01 \\ 0{,}34 \\ 17{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7{,}01 \\ 0{,}34 \\ 17{,}3 \end{pmatrix} \; -2{,}5\cdot(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 10 & 7{,}01 \\ 0 & 10 & 0 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 9 & -0{,}225 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c_0 &= \frac{7{,}01 + 10\cdot 0{,}025}{4} = \underline{\underline{1{,}815}} \\ c_1 &= \underline{\underline{0{,}034}} \\ c_3 &= -\underline{\underline{0{,}025}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p(x) = 1{,}815 + 0{,}034(x-10) - 0{,}025(x-10)^2}}$$

5 $\sin x = x^4 - 1$ rot $x^* \approx 1{,}2$

Bestäm $\bar{x}$ med fel $< 10^{-5}$.

$$f(x) = \sin x - x^4 + 1 = 0$$
$$f'(x) = \cos x - 4x^3$$

NR-metoden:

$$\bar{x}_2 = 1{,}2 - \frac{f(1{,}2)}{f'(1{,}2)} = 1{,}178$$

$x_3 = 1{,}177704\ldots$

$$|\bar{x}-x^*| \doteq \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(x^*)|} \approx \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} = \underline{\underline{6{,}653 \cdot 10^{-7} \leq 10^{-5}}}$$

b) $h = 0{,}5$.

$$y'' = 2y - xy' \quad y(0)=1,\ y'(0)=1$$

Sett:

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = v \\ v' = 2u - xv \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \qquad k_1 = f\left(x, \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + h, \begin{pmatrix} u_i + h \cdot k_1 \\ v_i + h \cdot k_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + 0{,}25(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f\left(0, \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\right) = f\left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f\left(\cancel{0} + 0{,}5,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = f\left(0{,}5, \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot 1{,}5 - 0{,}5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}25\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}25\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$x = 0{,}25$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}25(k_1 + k_2) \qquad \begin{cases} u_1' = v \\ v' = 2u - xv \end{cases}$$

$$k_1 = f\left(0{,}5, \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot 1{,}75 - 0{,}5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f\left(1, \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} 2{,}75 \\ 3{,}25 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 5{,}5 - 1 \cdot 3{,}25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}25\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}3125 \\ 1{,}1875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}0625 \\ 3{,}1875 \end{pmatrix}$$

Så $y(1) \approx 3{,}0625$

6

h	0,1	0,05	0,025	0,0125
$T(h)$	78,3625	78,32689	78,31799	78,31576

h	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
t	0,065231	0,033309	0,276025	2,750903

Noggrannhetsordningen.

$$\frac{T(4h) - T(2h)}{T(2h) - T(h)} = 2^p = 3{,}99 \Rightarrow \underline{p = 2}$$

Så p stämmer.

b) $T(10h)/T(h) = 10^p \Rightarrow 8{,}28$ och $9{,}96 \Rightarrow \underline{p = 1}$

$$\frac{T(h)}{T(10h)} \quad \text{eller} \quad n = \frac{1}{h} \Rightarrow \frac{T(10n)}{T(n)} = 10^{p}$$

vilket stämmer.

c) ~~För små h är Simpson noggrannare~~

För högre ordningens metoder ger Simpson högre noggrannhet

7 a) $O(h^3)$ ty ~~globalt~~ trunkeringsfel $O(h^{p+1})$
lokalt
ger globalt Rt

b) Pgg stabilitetsegenskaperna hos en explicit metod kan det krävas mycket korta steglängder. En implicit funktion har inget krav på steglängden.