

Lösningsgång

TANA21 – Beräkningsmatematik

Tenta – 2014-10-27

Skriuen av Oliver Wettergren

oliwe188@student.liu.se

<https://www.instagram.com/olwettergren/>

①

a) $\bar{a} = 0,5$ $\Delta a = 0,05$

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| \approx \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = \underline{\underline{0,10}}$$

b) $\underline{1,5 - 1 = 0,5}$

c) Kubiska interpolation interpolerar ett polynom

medan interpolation med kubiska splines interpolerar på varje delintervall.
polynom

d) $g(x) = x^2$

Fixpunkt till $g(x)$ är ett tal x^* som uppfyller $g(x^*) = x^*$.

$x^* = 0$ och $x^* = 1$ fixpunkter.

②

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5-4 \\ -4 & 0-1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5-4 \\ -4 & 0-1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\frac{4}{5}) \cdot (1) + (2) \\ (-1) \cdot (1) + (3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 5-4 \\ -4/5 & 4-4,2 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 5-4 \\ -4/5 & 4-4,2 \\ 1 & -1/2 & 6,9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sä, } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -4/5 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ & 4 & -4,2 \\ & & 6,9 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \underbrace{LU}_{y} x = Pb$$

$$Ly = Pb \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -4/5 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= 5 + \frac{4}{5} \cdot 4 = 8,2 \\ y_3 &= -7 + \frac{1}{2} \cdot 8,2 - 4 = \end{aligned}$$

$$y_3 = -7 + \frac{1}{2} \cdot 8,2 - 4 =$$

$$= -6,9$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 & & \\ & 4 & -4,2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 6,9 \\ & & & & & -6,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8,2 \\ -6,9 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{4 + 4(-1) - 5(1)}{5} = -1$$

$$x_2 = \frac{8,2 + 4,2(-1)}{4} = 1 \quad \text{sä } x = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

$$x_3 = -1$$

$$c) \quad \| \Delta b \|_1 \leq \frac{3}{2} \quad \| A^{-1} \|_1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\| \Delta x \|_1}{n \times n_1} = \| A \|_1 \cdot \| A^{-1} \|_1 \cdot \frac{\| \Delta b \|_1}{n \times n_1} = 14 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{16} = 0,875$$

$$= \frac{7}{8}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{array}{c|ccccc} x & -0,4 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0,4 \\ \hline f(x) & -0,35 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0,35 \end{array}$$

$$a) f(0,30)$$

$$p(x) = C_1 \frac{(x-0,2)(x-0,4)}{(0-0,2)(0-0,4)} + C_2 \frac{(x-0)(x-0,4)}{(0,2)(0,2-0,4)} \\ + C_3 \frac{(x-0)(x-0,2)}{(0,4)(0,4-0,2)}$$

oder

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0,2 \rightarrow p(x) = -5x(x-0,4) + 4,375x(x-0,2)$$

$$C_3 = 0,35$$

$$p(0,3) = \underline{\underline{0,28125}} \approx 0,28$$

$$b) p(x) = C_1 + C_2 x$$

$$p(-0,4) = C_1 - 0,4C_2 = -0,35$$

$$p(-0,2) = C_1 - 0,2C_2 = -0,2$$

$$p(0) = C_1 = 0$$

$$p(0,2) = C_1 + 0,2C_2 = 0,2$$

$$p(0,4) = C_1 + 0,4C_2 = 0,35$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 \\ 1 & -0,2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0,2 \\ 1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0,4 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -0,35 \\ -0,2 \\ 0 \\ 0,2 \\ 0,35 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,36 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0,9 \end{matrix}$$

Sum ger

$$p(x) = 0,9x \Rightarrow \underline{\underline{p(0,3) = 0,27}}$$

$$D_0 f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow$$

$$D_0 f(0,3) = \frac{0,27 - 0,35}{2 \cdot 0,1} = \underline{\underline{+0,75}}$$

$$p'(0,3) \approx +0,75$$

$$|\Delta z| \approx \frac{1}{2 \cdot 0,1} (|0,005| + |0,005|) = 0,05$$

$$\textcircled{4} \quad \sin x = x^2 \Rightarrow \sin x - x^2 = 0$$

$$\text{rot } x^* \approx 0,85$$

$$f(x) \rightarrow$$

$$f'(x) = \cos x - 2x$$

$$a) \quad |\bar{x} - x^*| = \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} =$$

største fejlprocent

$$\text{inde og øvre grænse } f(0,8) = 0,077 \dots > 0$$

$$f(0,9) = -0,026 \dots < 0 \text{ så ligger } x^* \text{ på intervallet}$$

$$\Rightarrow |\bar{x} - x^*| = \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} \leq 3,2 \cdot 10^{-2}$$

Newton Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow$$

$$x_1 = 0,85 - \frac{\sin(0,85 - (0,85)^2)}{\cos(0,85) - 2 \cdot 0,85} = 0,87767$$

$$x_2 = 0,87672... \approx 0,877$$

5

n	32	64	128	256	512
y_n	9,059	9,270	9,348	9,348	9,352
t	0,83	1,53	5,95	5,95	12,9

Ansätt: ~~Cot~~ $Cot C n^p$

a)

$$\Rightarrow \frac{F(4) - F(2n)}{F(2n) - F(n)} \approx 2^p \Rightarrow 2^p = 4 \text{ sei } p = 2$$

WVst stämmer med formelsamlingen

b) Ja det går nog men vi har inget att
 jämföra med så vi vet ej - (riktigt korrekt
 värde)

c) Ansätt: $t(n) = C n^p$

$$\Rightarrow \frac{t(2n)}{t(n)} \approx 2^p \Rightarrow 2^p = 2 \Rightarrow \underline{\underline{p=1}}$$

\uparrow
 förutsatt

$$\textcircled{b} \quad x^* = \frac{1}{5}$$

$\bar{x} - x^*$	1	2	3	4	5	6	7
	0,6	0,4	0,3	0,25	0,225	0,2125	
	1	2	3	4	5	6	7
	0,8	0,4	0,2	0,1	0,05	0,025	0,0125

$$\frac{|x_{u+1} - x^*|}{|x_u - x^*|} \Rightarrow \frac{|x_{u+1} - x^*|}{|x_u - x^*|^p} = \text{okta ut slua r\u00f6tuna p\u00e4}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_i - x^*|^p} &\leq C \\ \frac{|x_{i+2} - x^*|}{|x_{i+1} - x^*|^p} &= C \end{aligned} \right\} \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_i - x^*|^p} = \frac{|x_{i+2} - x^*|}{|x_{i+1} - x^*|^p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_{i+2} - x^*|} = \frac{|x_i - x^*|^p}{|x_{i+1} - x^*|^p}$$

$\textcircled{c} \text{hp-}$

$$\Rightarrow p = \frac{\ln\left(\frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_{i+2} - x^*|}\right)}{\ln\left(\frac{|x_i - x^*|}{|x_{i+1} - x^*|}\right)} = 1$$

