Föreläsning 9

TAMS14 – Sannolikhetslära

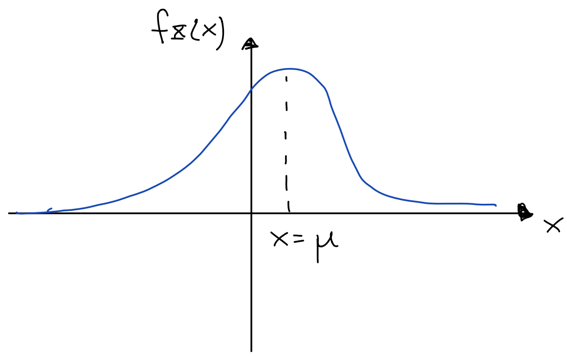
Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Normalfördelning

Def:

En kontinuerlig s.v X sägs vara normalfördelad, om den har täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Kodbeteckning:

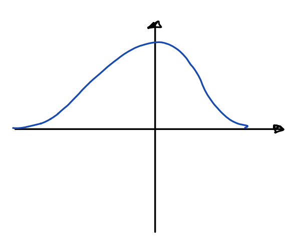
$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

Här är $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Det gäller att

$$E(X) = \mu$$
$$V(X) = \sigma^2$$

Om $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ sägs X vara standardnormal. Då är:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Fördelningsfunktionen är då:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \, du, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

OBS:

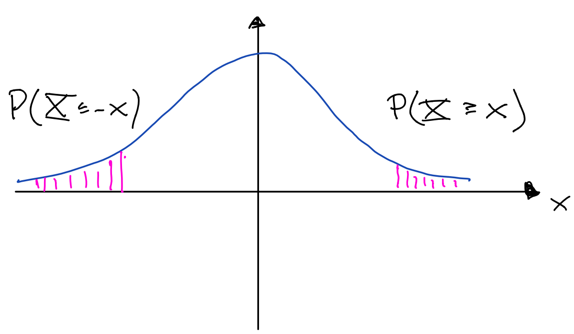
$\Phi(x)$ kan ej beräknas analytiskt, men finns tabellerad i FS för $x \geq 0$.

För $x < 0$ utnyttjas sambandet:

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bevis:

$$\Phi(x) = P(X \leq x) =$$
$$= \{\text{symmetri}\} =$$
$$= P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) =$$
$$= 1 - \Phi(x)$$



B 6.2

Låt

$$X \sim (0,1).$$

$$P(0.21 < X < 0.29) = F_X(0.29) - F_X(0,21) =$$
$$= \Phi(0.29) - \Phi(0.21) = \{\text{tabell}\} \approx 0,6141 - 0,5832 = 0,0309$$

$$P(-0,21 < X < 0.29) = \Phi(0.29) - \Phi(0.21) = \Phi(0.29) -$$
$$- (1 - \Phi(0.21)) \approx 0.614 + 0.5832 - 1 = 0.197$$

$$P(-0.29 < X < -0.21) = \Phi(-0.21) - \Phi(-0.29) =$$
$$= 1 - \Phi(0.21) - (1 - \Phi(0.29)) \approx 0,0309$$

Ex:

Låt

$$X \sim N(0,1).$$

Bestäm x så att

a) $P(X > x) = 0.001 \Rightarrow P(X > x) = 1 - P(X \leq x) =$
$= 1 - \Phi(x) = 0,001 \Rightarrow \Phi(x) = 0.999 \Rightarrow \{\text{tabell}\} \Rightarrow x \approx 3.10$

b) $P(X > x) = 0.999 \Rightarrow P(X > x) = 1 - \Phi(x) = 0.999 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(x) = 0.001$

Ej i tabell, men

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(x) = 0.001 \Rightarrow \Phi(-x) = 0.999 \Rightarrow x \approx -3.10$$

c) $P(|X| < x) = 0.95 \Rightarrow P(|X| < x) = P(-x < X < x) =$
$= \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1 = 0.95 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0,975 \Rightarrow x \approx 1.96$

SATS 6.3

Låt

$$X \sim (\mu, \sigma)$$

och låt

$$Y = aX + b.$$

Då är

$$Y \sim N(a\mu + b, \sqrt{a^2\sigma^2})$$

Följdsats 6.1

Låt

$$X \sim N(\mu, \sigma),$$

och låt

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad \text{"standardisering".}$$

Då är

$$Y \sim N(0, 1)$$

Bevis: Sats 6.3

Med

$$a = 1/\sigma$$
$$b = -\mu/\sigma$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) =$$

$$= \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{om } a > 0 \\ P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Vi får

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{|a|} F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2/2\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} e^{-(y-a\mu-b)^2/2a^2\mu^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Dvs,

$$Y \sim N(a\mu+b, \sqrt{a^2\sigma^2}).$$

7.1

Låt

$$X \sim (2, 0.4)$$

a) $P(X \geq 2.3) = P\left(\frac{X-2}{0.4} \geq \frac{2.3-2}{0.4}\right) = (*)$,

där

$$Y \sim N(0,1).$$

Detta ger

$$(*) = P\left(Y \geq \frac{3}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1 - 0.7734 = 0.2266$$

b) $P(1.8 \leq X \leq 2.1) = P\left(\frac{1.8-2}{0.4} \leq \underbrace{\frac{X-2}{0.4}}_{N(0,1)} \leq \frac{2.1-2}{0.4}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{0.1}{0.4}\right) - \Phi\left(\frac{-0.2}{0.4}\right) = \Phi\left(\frac{1}{4}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx 0.5987 +$$

$$+ 0.6915 - 1 \approx 0.29.$$

B 6.6

Låt

$$X \sim N(20, 3).$$

Bestäm x så att

$$P(X \le x) = 0.01 \Rightarrow$$

$$P(X \le x) = P\Big(\underbrace{\frac{X-20}{3}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{x-20}{3}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-20}{3}\Big) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\Big(\frac{x-20}{3}\Big) = 1 - \Phi\Big(-\Big(\frac{x-20}{3}\Big)\Big) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\Big(-\Big(\frac{x-20}{3}\Big)\Big) = 0.99 \Rightarrow -\Big(\frac{x-20}{3}\Big) \approx 2.33 \Rightarrow x \approx 13.01$$

SATS 6.5

Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara oberoende s.v., sådana att

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i),\quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Låt

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

Då är

$$Y \sim N\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b,\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}\Big)$$

Bevis: Faltningsformeln, komplicerat.

7.5

Låt X_1, X_2, X_3, X_4 vara oberoende s.v, så att

$$X_i \sim N\left(1, \frac{1}{2}\right), \quad i = 1,2,3,4.$$

Låt

$$Y = 2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4.$$

SATS 6.5 $\Rightarrow$

Y är normalfördelad, med:

$$E(Y) = 2E(X_1) - E(X_2) + E(X_3) - 3E(X_4) = 2\cdot 1 - 1 + 1 - 3 \cdot 1 = -1,$$

$$V(Y) = 2^2 V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) + 1^2 V(X_3) + (-3)^2 V(X_4) =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$D(Y) = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Alltså:

$$Y \sim N\left(-1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right).$$

$$P(-2 < Y < 3) = P\left(\frac{-2+1}{\sqrt{15}/2} < \frac{Y+1}{\sqrt{15}/2} < \frac{3+1}{\sqrt{15}/2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{15}}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{\sqrt{15}}\right) = \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{15}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)\right) \approx 0.68$$

Följdsats 6.5.1

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende $N(\mu, \sigma)$-fördelade s.v., och låt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Vi vet att : $\begin{cases} E(\bar{X}_n) = \mu \\ V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$ (föreläsning 8).

SATS 6.5 =>

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma}{n}),$$

så:

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1).$$

SATS 6.8, Centrala gränsvärdessatsen

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en följd av oberoende och likfördelade s.v, så att:

$$\begin{cases} E(X_i) = \mu, & i = 1, 2, \ldots \\ V(X_i) = \sigma^2, & i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

OBS: Ej nödvändigtvis normalfördelade.

Låt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Då gäller

$$P\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right) \longrightarrow \Phi(b) - \Phi(a), \text{ då } n \to \infty$$

Alternativ formulering:

$$\begin{cases} \bar{X}_n \sim \text{approx } N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \text{ då } n \text{ "stort" } (n \geq 25) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{ approx } N(n\mu, \sqrt{n}\sigma), \text{ då } n \text{ "stort" } (n \geq 25) \end{cases}$$

7.15

Låt

X_i = avrundningsfel nr. i, $i = 1, 2, \ldots, 1500$

X_i:na oberoende, och $U(-0.5, 0{,}5)$-fördelade, dvs.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & -0.5 < x < 0.5 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Låt

$$Y = \sum_{i=1}^{1500} X_i.$$

Beräkna $P(|Y| > 15)$.

CGS säger att

$$Y \sim \text{approx } N(1500 \cdot E(X), \sqrt{1500} \cdot D(X))$$

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X_1}(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} x \cdot 1 \cdot dx = 0$$

$$V(X_1) = E(X_1^2) - \underbrace{E(X_1)^2}_{=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_1}(x)\,dx = \int_{-1/2}^{+1/2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{12}.$$

Alltså:

$$Y \sim \text{approx } N\left(0, \sqrt{\frac{1500}{12}}\right) = N(0, \sqrt{125})$$

$$P(|Y| > 15) = 1 - P(|Y| \leq 15) = 1 - P(-15 \leq Y \leq 15) =$$

$$= 1 - P\Bigg(\frac{-15}{\sqrt{125}} \leq \underbrace{\frac{Y}{\sqrt{125}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{15}{\sqrt{125}}\Bigg) \approx 1 - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(-\frac{15}{\sqrt{125}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right)\right) \approx 0{,}18$$

b) Låt

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

Då gäller (om $n \gtrsim 25$):

$$Y \approx N\left(0, \sqrt{\frac{n}{12}}\right)$$

där n ska bestämmas så att

$$P(|Y| \leq 10) = 0.9$$

$$P(|Y| \leq 10) = P(-10 \leq Y \leq 10) = P\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \leq \frac{Y}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \leq \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1 = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) = \frac{19}{2} = 0.95 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \approx 1{,}65$$