SIMPLEX-STEGEN

⓪ Finn tillåten baslösning

① Uppdatera nodpriser
- utgå från basbågar $\bar{c}_{ij}=0$
- Sätt $y_1=0$

② Beräkna reducerad kostnad för icke-basbågar
$\bar{c}_{ij}=c_{ij}+y_i-y_j$

③ Kontrollera optimalitet
- $\bar{c}_{ij}<0 \Rightarrow x_{ij}=u_{ij}$
- $\bar{c}_{ij}>0 \Rightarrow x_{ij}=l_{ij}$
- $\bar{c}_{ij}=0 \Rightarrow l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$

④ Välj mest lovande variabel som inkommande

⑤ Finn cykel som bildas

⑥ Välj variabel som begränsar som utgående

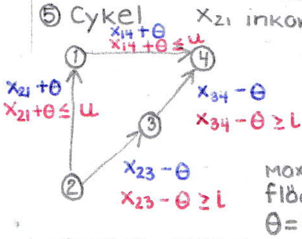
⑦ Uppdatera flöde => ①

Exempel, tänka på

Basträd
- bågar = noder − 1
- unik väg mellan 2 noder
- Om båge adderas => cykel

Baslösning
- Basträd
- Tillåtet flöde (Nodbalans källor/sänkor

⑤ Cykel x_{21} inkommande



$\theta\le 2$
$\theta\le 1$
$\theta\le 1$
$\theta\le 2$

Max tillåtna flödesändring $\theta=1$

väljer x_{23} eller x_{34}
med inkommandes riktning:
$x+\theta\le u$
mot inkommandes riktning:
$x-\theta\ge l$

Egenskaper projektnät
- Kan aldrig bli cykel
- Numrera noderna så bågarna går från lägre till högre nod
- Försöker man lösa med cykel fås obegränsad lösning
- Flödet = dualvariablerna

KNEP NÄTVERKSMODELLER
- Gemensam efterfrågan/utbud => superkälla/sänka
- Kostnad/begränsning vid nod => dela upp i två noder
- Förlust = negativ vinst
  vinst = negativ förlust
- Överkapacitet: Båge med kostnad 0

Lagrangerelaxation

min $f(\bar{x})$
då $g_1(\bar{x})\ge b_1$
$g_2(\bar{x})\le b_2$

Lagrangefunktion
$L(\bar{x},\bar{v})=f(\bar{x})+v_1(b_1-g_1(\bar{x}))-v_2(b_2-g_2(\bar{x}))$
$v_1\ge 0$ $v_2\ge 0$

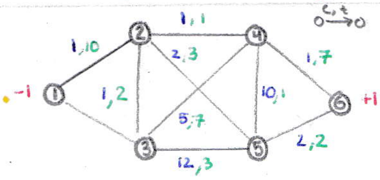
Kontroll:
Testa tecken framför v genom att sätta in något som bryter & se till att det straffas.

min-problem
$f(x)$ - pessimistisk
f^*
$h(\bar{v})$ - optimistisk

Byt plats på $f(x)$ & $h(\bar{v})$ vid max

EXEMPEL

väg från ① till ⑥
Minimera kostnad
Krav: total tid ≤ 14



- Linjärt HP

$x_{ij}=\begin{cases}1 \text{ om väg används}\\ 0 \text{ annars}\end{cases}$

$\min z=\sum_{i,j\in B} c_{ij}\cdot x_{ij}=x_{12}+10x_{13}+x_{24}+2x_{25}+x_{32}+5x_{34}+12x_{35}+10x_{45}+x_{46}+2x_{56}$

då $\sum_{i,j\in B} t_{ij}\cdot x_{ij}=10x_{12}+3x_{13}+x_{24}+3x_{25}+2x_{32}+7x_{34}+3x_{35}+x_{45}+7x_{46}+2x_{56}\le 14$

$$\left.\begin{array}{ll}
① -x_{12}-x_{13}=-1 & ④ x_{24}+x_{34}-x_{45}-x_{46}=0\\
② x_{12}+x_{32}-x_{24}-x_{25}=0 & ⑤ x_{25}+x_{35}+x_{45}-x_{56}=0\\
③ x_{13}-x_{32}-x_{34}-x_{35}=0 & ⑥ x_{46}+x_{56}=1
\end{array}\right\} x\in X$$

- Lagrangerelaxerar tidsvillkor

$L(\bar{x},v)=\sum c_{ij}\cdot x_{ij}-v(14-\sum t_{ij}\cdot x_{ij})$ ← lägger − framför v pga normalform s. 291

värde på v avgör hur hårt funktionen straffas

Iteration	Avsökta	Ej avsökta	Aktuell
1	–	1,2,3,4,5,6	1
2	1	2,3,4,5,6	2
3	1,2	3,4,5,6	4
4	1,2,4	3, 5,6	6

$h(v=0)=1+1+1=3$
Billigaste väg: 1-2-3-6
Kontrollera tillåtenhet i bivillkor
=> $10+1+7=18 \not\le 14$
=> ingen pessimistisk

Lösningsstrategi
- Relaxera vissa villkor & lös subproblemet som är enklare än det ursprungliga problemet
- Arbeta med skattningar & tillåtna lösningar
- h(v) ger ALLTID optimistisk skattning
- Om en subproblemlösning är otillåten i det ursprungliga problemet kan en heuristik användas för att göra till tillåten
- När den givna lösningen är optimal => stark dualitet
  => duala målfunktionsvärdet samma som primala $z^*=h(v)$

$\max z=10x_{11}+4x_{12}+4x_{21}+5x_{22}$
då $2x_{11}+x_{21}\le 2$
$4x_{12}+3x_{22}\le 6$
$x_{11}+x_{12}=1$
$x_{21}+x_{22}=1$

$h(1,1)=\max\{8x_{11}+3x_{21}+2x_{22}\}+8$
$=\max\{8x_{11}\}+\max\{3x_{21}+2x_{22}\}+8$

$\underbrace{x_{11}+x_{12}=1 \quad x_{11},x_{2}\in\{0,1\}}_{\text{sub 1}}$ $\underbrace{x_{21}+x_{12}=1 \quad x_{21},x_{12}\in\{0,1\}}_{\text{sub 2}}$

Flödet på icke-basbågar behöver antingen vara på sin övre eller undre gräns

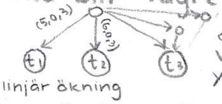
Lönsamt att skicka enheter om $\bar{c}_{ij}<0$

Om ny båge tillkommer, kolla vilken kostnad den kan ha & om det är möjligt att skicka genom att titta på cykeln (flödesändring

Simplexmetoden hittar extrempunkter, dessa är heltaliga men kan finnas icke-heltaliga optimallösningar.

Nätverk, både dyraste & billigaste väg i nätverk
- Finnas väg från startnod till slutnod
- Får inte finnas cykler med totalkostnad >0 (då fås obegränsad lösning i dyraste-väg) eller <0 (då fås obegränsad lösning i billigaste-väg)
  Eventuella cykler totalkostnad = 0

Kan följa given kostnadstabell om kostnaden inte blir lägre om fler tillverkas

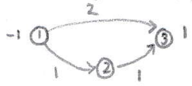


olika stor ökning.
Väljer billigaste båge först & ska ytterligare skickas går de på andra bågar

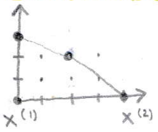
Om lösningen är optimal efter simplex-metoden är det duala värdet = primala & kan då räkna ut genom att multiplicera kostnad med flöde i hela nätverket (inte bara flödet på basbågar)

- Ett minkostnadsflödesproblem kan ha ickeheltaliga optimallösningar
  Simplex tar fram lösningar som är heltaliga,
  Exempel lösningar

$x_{12}=x_{23}=0 \quad x_{13}=1$ &
$x_{12}=x_{23}=1 \quad x_{13}=0$
} Båda optimala $z=2$



EXEMPEL KONVEXT HÖLJE



Hörnpunkter
$x^{(1)}=(0,0)=(x_1^{(1)},x_2^{(2)})$
$x^{(2)}=(4,0)=(x_1^{(2)},x_2^{(2)})$
$x^{(3)}=(2,2)=(x_1^{(3)},x_2^{(3)})$
$x^{(4)}=(0,3)=(x_1^{(4)}x_2^{(4)})$

De tillåtna lösningarna till det konvexa höljet kan utvecklas som:

$x=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x^{(i)}$ där $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=1 \quad 0\le\lambda_i\le 1 \quad i=1,..4$

modell:
$\max z= 8\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_1^{(i)}+10\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_2^{(i)}$
$0\le\lambda_i\le 1 \quad i=1,..4$

LP alltid fler möjligheter $\Rightarrow z^*_{LP}$ bättre (eller samma)

min: $z^*_{LP}\le z^*_{HP}\le z_{HP}$
max: $z_{HP}\le z^*_{HP}\le z^*_{LP}$

Syfte med LP-relaxation
Lägga till bivillkor tills z^*_{LP} är heltalig

Ju närmare z^*_{LP} är z^*_{HP}, desto starkare formulering.
Om z^*_{LP} är heltal $=z^*_{HP}$

SIMPLEXMETODEN

Primala
- Inkommande - mest lovande kollar c_i
- utgående - Begränsande variabel $\frac{b_i}{a_{ij}}$

Duala
- utgående - otillåten
- Inkommande - minst försämring $\min\left|\frac{c_i}{a_{ij}}\right|$ för $a_{ij}<0$

EXEMPEL

$\max z=5x_1+2x_2$
då $5x_1+4x_2\le 21$
$x_1,x_2\ge 0$, heltal

Löser LP-relaxation

basv	z	x_1	x_2	s_1	$\bar{b}$
z	1	-5	-2	0	0
s_1	0	5	4	1	21

↑ ① (1/5)

inkommande: x_1
utgående: s_1

basv	z	x_1	x_2	s_1	$\bar{b}$
z	1	0	2	1	21
x_1	0	1	4/5	1/5	21/5

#1: z^*_{LP}: $x_1=\frac{21}{5}$ $x_2=0$

$x_1+\frac{4}{5}x_2+\frac{1}{5}s_1=\frac{21}{5}$

$x_1+\frac{4}{5}x_2+\frac{1}{5}s_1=4+\frac{1}{5}$

$\underbrace{x_1-4}_{\le 0}=\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{4}{5}x_2-\frac{1}{5}s_1}_{\text{Fraktionell del}}\le 0$

BV: $-\frac{4}{5}x_2-\frac{1}{5}s_1+s_2=-\frac{1}{5}$

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$	
z	1	0	2	1	0	21	(0)
x_1	0	1	4/5	1/5	0	21/5	(1)
s_2	0	0	-4/5	-1/5	1	-1/5	(2)

utgående: s_2 (väljer minsta)
inkommande: x_2 : $\left|\frac{2}{-4/5}\right|=\frac{10}{4}=2{,}5$ ←
s_1 : $\left|\frac{1}{-1/5}\right|=5$

vill utföra operationer så inkommande blir 0 i hela raden förutom dess "basrad"

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$	
z	1	0	0	1/2	5/2	41/2	(0)
x_1	0	1	0	0	1	4	(1)
x_2	0	0	1	1/4	-5/4	1/4	(2)

z^*_{LP}: $x_1=4$
$x_2=1/4$

(2): $x_2+\frac{1}{4}s_1-\frac{5}{4}s_2=1/4$

$x_2+\frac{1}{4}s_1-2s_2+\frac{3}{4}s_2=1/4$

$\underbrace{x_2-2s_2}=\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}s_1-\frac{3}{4}s_2}$

BV: $-\frac{1}{4}s_1-\frac{3}{4}s_2+s_3=-\frac{1}{4}$

$x_2-2s_2\le 0$ Lös ut s_2, skriv om
∴ $2x_1+x_2\le 8$

Lägger in bivillkor i tablån & slutar när x_1 & x_2 heltal

morysnitt

ax $z = 8x_1 + 10x_2$

då $x_1 + 2x_2 \le 6$ (1)

$3x_1 + 2x_2 \le 12$ (2)

$x_1, x_2 \ge 0$, heltal

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	0	0	7/2	3/2	39
x_2	0	0	1	3/4	-1/4	3/2
x_1	0	1	0	-1/2	1/2	3

Görett snitt

$=1+\frac{1}{2}$

$2 + \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 = \frac{3}{2} \iff x_2 - s_2 = -\frac{3}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 + \frac{3}{2}$

eltalssnitt: $x_2 - s_2 \le 1$

raktionellt snitt: $\frac{3}{4}s_1 + \frac{3}{4}s_2 = \frac{1}{2}$

ivillkor (2) ger:

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 12$

$= 12 - 3x_1 - 2x_2$

Heltalssnitt:

$x_2 - s_2 \le 1$

$x_2 - (12 - 3x_1 - 2x_2) \le 1$

$3x_2 + 3x_1 \le 13$

ltalssnitt uttryckt variabler x_1, x_2 ↗

Om Gomorysnittet skär bort LP-optimum men ingen tillåten heltalspunkt => Rimligt resultat

eltalsproblem → Skattning av z^*

> heltalspunkt pessimistisk skattning

P-optimum → optimistisk skattning

Punkt	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z heltal
A	0	0	12	3	6	0 - pess. $z^* \ge 0$
B	3/2	0	0	0	3	12 - inget
C	1	4/3	0	7/3	0	14,7 - LP-optimum $z^* \le \lfloor 14{,}7 \rfloor = 14$
D	0	2	6	5	0	10 - heltal $z^* \ge 10$

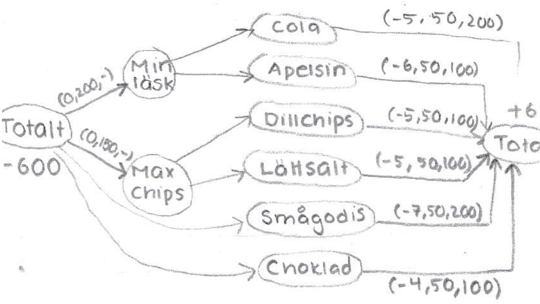
$10 \le z^* \le 14$

EXEMPEL NÄTVERK

agret

ad	Antal	Vinst
ola	200	5
elsin	100	6
ll	100	5
lt	100	5
dis	200	7
oklad	100	4

600 varor
- 200 läsk
- 50 av varje
- max 150 chips



OM IHÅG

- Lägg till "begränsningar" på alla variabler. ex: $x_1 \ge 0$, heltal
- Definiera intervall jämt ex: $i = 1,..,I$
- Kolla normalform s.291
- Icke basbågar ska ligga på L eller U
- "Balansera nätverket

Land-Doig-Dakins min-problem

P0 : $z^*_{LP} = 20$

P1 : $z^*_{LP} = 25$ heltal

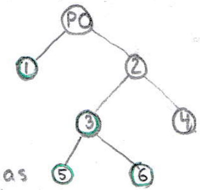
P2 : $z^*_{LP} = 21$

P3 : $z^*_{LP} = 22$

P5 : $z^*_{LP} = 26$

P6 : $z^*_{LP} = 27$

P4 : Tillåten lösning saknas



z^*_{LP} optimala målfunktionsvärde för LP-relaxationen

Kapa eller undersöka vidare?

Nod 1,3,5,6 ger optimistiska skattningar. Mest optimistisk nod 1, dvs $z^*_{LP} = z^*$.

Alla heltalslösningar ger pessimistisk skattning

$25 \le z^* \le 25 \quad z^* = 25$

① : kapa, heltalig lösning

4 : kapa, otillåten lösning

5,6 : kapa ty lösning sämre än pessimistiska skattning

- Kan LP-lösning ligga i det konvexa höljet om $z^* > z^*_{LP}$ i min-prob
  - Nej, z^* är optimallösning i konvexa höljet & kan då inte finnas ngn lösning i konvexa höljet som är strikt bättre
- Om målfunkt.koeff. ej heltaliga behöver ej z^*_{HP} vara heltalig

EXEMPEL - maxproblem

P0: $z_R = 50$

P1 : $z_R = 48$

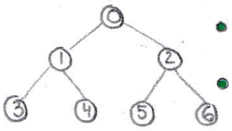
P2 : $z_R = 47$

P3 : $z_R = 45$

P4 : $z_R = 46$

P5 : $z_R = a$

P6 : Tillåten saknas



Finns tillåten lösning i P5

- Tillåtna området i P5 är restriktion av P2 => $a \le 47$
- För att man ska fortsätta från P5 behöver a vara fraktionell & z_R bättre än kända tillåtna lösningen => $a > 45$
- För att man ska kapa vid P5 kan a vara heltalig eller fraktionell & z_R är inte bättre än den kända tillåtna lösningen

Maxproblem : $z_T = -\infty$ z_R avrundas nedåt

Minproblem : $z_T = \infty$ z_R avrunda uppåt

Kruskal, s.188

⓪ sortera bågar

① välj billigaste => lägg till

② Avbryt då antal bågar = n-1 Annars ①

Prim, s.188

⓪ välj startnod

① Lägg till billigaste båge till ngn nod

② Avbryt då antal bågar = n-1 annars ①

Ford & Dijkstraks algoritm s.194

Handelsresandeproblem

- Alla noder ska besökas 1 gång
- Skapar en cykel
- Antal bågar = Antal noder

Närmaste granne

⓪ Välj startnod

① Lägg till billigaste båge till närmaste ej besökta nod

② Om antal bågar = n, avbryt annars ①

Land-Doig-Dakins

- Om fraktionella delar är lika & 2 bivillkor → välj den med störst målkoefficient
- Om flera variabler => Rangordna. Målfunk.koeff / bivillkorskoeff

EXEMPEL

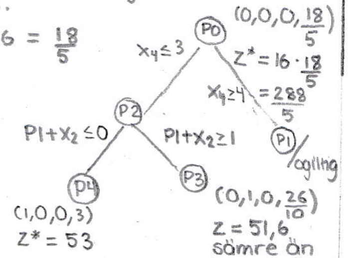
max $z = 5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 16x_4$

då $6x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 10x_4$

$x_1 = \frac{5}{6}$ ③ $x_2 = \frac{10}{10}$ ② $x_3 = \frac{10}{15}$ ④ $x_4 = \frac{16}{10}$ ①

vill ha så många x_4 som möjligt.

$x_4 = 3{,}6 = \frac{18}{5}$



Min: $\underline{z} \le z^* \le \overline{z}$
optimistisk pessimistisk

Max: $\overline{z} \le z^* \le \underline{z}$
pessimistisk optimistisk

z_T = tillåten lösning

Tabusökning

- Tillåter lokal försämring
- Enda gången man med säkerhet vet att globalt optimum = lokalt är om samtliga lösningar ingår i omgivningen. Teoretiskt men inte praktiskt möjligt, eftersom man känner alla lösningar behöver man inte använda lokalsökning
- Om man kommer tillbaka till samma lösning & tabulistan innehåller samma byten kommer de följande iterationerna följa samma cykel & sökning kan avbrytas. Om tabulistan inte innehåller samma byten finns chans att lösning blir annorlunda => fortsätt