Föreläsning 5

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Tvådimensionella stokastiska variabler

Generalisering till 3 eller fler dimensioner är uppenbar.

Låt Ω vara ett utfallsrum. En tvådimensionell s.v. (X, Y) är en funktion

$$(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$$

Exempel: resultat av två tärningskast

pilkastning X: x-koordinat, Y: y-koordinat

- $S_{X,Y}$ = värdemängden för (X, Y)

Till varje 2-dim s.v. (X, Y) hör en (simultan) fördelningsfunktion

$$F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1],$$

definierad av

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Egenskaper

1) $F_{X,Y}$ är icke-avtagande (och högerkontinuerlig) i såväl x som y

2) $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$F_Y(x) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Diskreta 2-dim stokastisk variabel

En 2-dim s.v. (X, Y) sägs vara diskret om den antar ändligt eller uppräkneligt oändligt många värden (tex par av heltalsvärden)

Till varje diskret 2-dim s.v. (X, Y) hör en (simultan) sannolikhetsfunktion

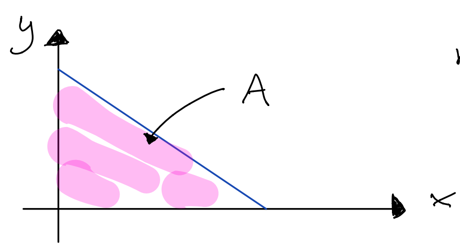
$$p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1],$$

definierad av:

$$p_{X,Y} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Egenskaper:

1) $$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} p_{X,Y}(x, y) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^2$$



n. $\frac{1}{36}$

2) $$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\substack{u \le x \\ v \le y}} p_{X,Y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Bevis: tag $A = \{(u, v);\ u \le x;\ v \le y\}$

3) $$\sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} p_{X,Y}(x, y) = 1$$

Bevis: tag $A = \mathbb{R}^2$

4) Marginella sannolikhetsfunktioner

$$p_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}^2} p_{X,Y}(x,y) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}^2} p_{X,Y}(x,y) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

B.4.1 Välj en familj på måfå, i området.
Låt

$$\begin{cases} X = \text{antalet barn i familjen} \\ Y = \text{antalet rum i dess lägenhet} \end{cases}$$

(X, Y) är en 2-dim diskret s.v, med sannolikhetsfunktion given i tabellen

a) Beräkna

$$P(\overbrace{\{X \leq 1\}}^{\text{max 1 barn}} \cap \overbrace{\{Y \leq 3\}}^{\text{max 3 rum}}) = P((X,Y) \in A),$$

där

$$A = \{(x,y);\ x \leq 1,\ y \leq 3\}$$

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 3}} p_{X,Y}(x,y) =$$

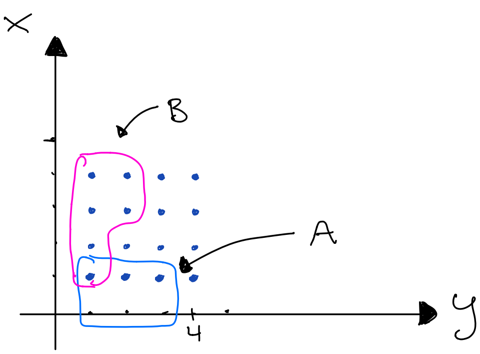
$$= p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + \ldots + p_{X,Y}(1,3) =$$

$$= 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}07 + 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}58$$

b) Beräkna

$$P\left(\frac{X+2}{Y} > 2\right) = P((X,Y) \in B) = \sum_{(x,y)\in B} p_{X,Y}(x,y) =$$

$$= 0{,}07 + 0{,}02 + 0 + 0 + 0{,}02 + 0 = 0{,}11$$



c) X är en s.v, med

$$S_X = \{0,1,2,3,4\}$$

$$p_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y) \quad \forall x \in S_X$$

Vi får:

$$p_X(0) = 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}07 + 0{,}01 = 0{,}28$$

$$p_X(1) = 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}02 = 0{,}33$$

På samma sätt

$$p_X(2) = 0{,}29, \quad p_X(3) = 0{,}08, \quad p_X(4) = 0{,}02$$

Y är en s.v, med

$$S = \{1,2,3,4\}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y) \quad \forall y \in S_Y$$

Vi får:

$$P_Y(1) = 0{,}11 + 0{,}07 + 0{,}02 + 0 + 0 = 0{,}20$$
$$P_Y(2) = 0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0 = 0{,}28$$

På samma sätt:

$$P_Y(3) = 0{,}41, \quad P_Y(4) = 0{,}11$$

Kontinuerliga 2-dim stokastiska variabler

En 2-dim s.v. (X, Y) sägs vara kontinuerlig, om det existerar en så kallad (simultan) täthetsfunktion

$$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty],$$

sådan att

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Egenskaper:

1) $P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \quad \forall A \subset \mathbb{R}^2$

2) $\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

3) $\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

där $f_{X,Y}$ är kontinuerlig i (x,y)

4) Marginella täthetsfunktioner

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

5,1

(X, Y) är en tvådimensionell kontinuerlig s.v., med täthetsfunktion:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & \text{då } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Beräkna $P(X > \frac{1}{2})$. X är en (1-dim) kontinuerlig s.v., med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \left\{ \begin{matrix} \text{Antag} \\ 0 < x < 1 \end{matrix} \right\} = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy =$$

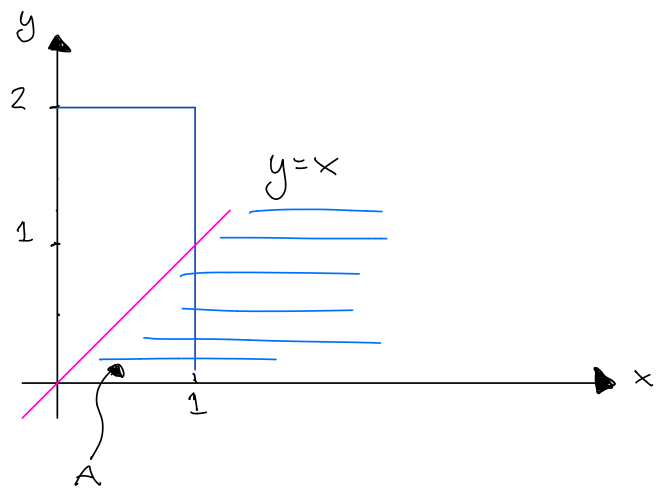
$$= \left[x^2 y + \frac{xy^2}{6} \right]_0^2 = 2x^2 + \frac{2x}{3} \quad \text{för } 0 < x < 1$$

$[f_X(x) = 0 \text{ annars}]$

$$P(X > \tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{3} \right]_{1/2}^{1} = \frac{5}{6}$$

b) Beräkna $P(X > Y) = P((X,Y) \in A)$, se figur!



Vi får:

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{6}\right]_0^x dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{6}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24}\right]_0^1 = \frac{7}{24}$$

Oberoende stokastiska variabler

Två s.v. X och Y sägs vara oberoende, om: varje händelse som enbart beror av X är oberoende av varje händelse som enbart beror av Y

Detta är ekvivalent med att:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

SATS:

Två diskreta s.v. X och Y är oberoende om och endast om:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

SATS:

Två kontinuerliga s.v. X och Y är oberoende om och endast om:

$$f_{X,Y} = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

5,26

(X, Y) är en 2-dim. kontinuerlig s.v

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), \text{ då } \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{cases} \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\,dy = \ldots = \frac{1}{8}(2x+2),$$

då $0<x<2$

[0, annars]

På samma sätt fås:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2y+2), \; 0<y<2 \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

$$f_X(x)\,f_Y(y) = \frac{1}{16}(xy + x + y + 1) \neq f_{X,Y}(x,y),$$

så X och Y är ej oberoende.

En viktig 2-dim kontinuerlig sannolikhetsfördelning

Likformig fördelning (på ett område $S \subset \mathbb{R}^2$)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{area}(S)}, & \forall (x,y) \in S \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$