Föreläsning 11

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Approximationer av diskreta sannolikhetsfördelningar

Bin(n, p):

(i) Om

$$p \leq 0.1,$$

så är

$$\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathrm{Po}(\mu), \quad \mu = np.$$

(ii) Om

$$np(1-p) \geq 10$$

så är

$$\mathrm{Bin}(n,p) \approx N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

Motivering:

Låt $I_1, I_2, \ldots, I_n$ vara oberoende s.v som antar värdena 0 och 1, så att

$$P(I_i = 1) = p, \quad i = 1, \ldots, n$$

Låt

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Då är $\underline{X} \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Men om n är stort, så ger CGS att

$$X \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Hyp(N, n, p):

(i) Om

$$\frac{n}{N} \leq 0.1,$$

så är

$$Hyp(N, n, p) \approx Bin(n, p).$$

(ii) Om

$$np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \geq 10,$$

så är

$$Hyp(N, n, p) \approx N\left(np, \sqrt{np(1-p)\frac{(N-n)}{(N-1)}}\right)$$

Po(μ):

Om

$$\mu \geq 15,$$

så är

$$Po(\mu) \approx N(\mu, \sqrt{\mu})$$

8.26

Låt

A_i = sidan nummer i "felfritt överförd", $i = 1, 2, \ldots, 600$

A_i:na är oberoende, och

$$P(A_i) = p, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Vad är p?

$$p = P(\text{"2000 tecken överförs felfritt"}) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tecknen överförs oberoende av varandra,} \\ \text{med felsannolikhet } 0.001 \end{array} \right\} =$$

$$= (1 - 0.001)^{2000} \approx 0.1352$$

Låt

X = antalet felfritt överförda sidor =

= det antal av A_i:na som inträffar.

Sats 7.1 =>

$$X \sim Bin(600, 0,1352)$$

Sökt är

$$P(X \geq 100) = \sum_{x \geq 100} p_X(x) = \sum_{x=100}^{600} \binom{600}{x} 0.1352^x (1 - 0.1352)^{600-x}$$

Kan ej beräknas för hand.

Approximation!

$$np(1-p) = 600 \cdot 0.1352(1-0.1315) \approx 70.15 \geq 10 \Rightarrow$$

$$X \approx N(600 \cdot 0.1352, \sqrt{70.15}) \approx N(81.1, 8.38)$$

$$P(X \geq 100) = P\left(\frac{X-81.1}{8.38} \geq \frac{100-81.1}{8.38}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{18.9}{8.38}\right) \approx 0.012$$

Alternativ:

- $P(X \geq 100) = P(X > 99) = P\left(\frac{X-81.1}{8.38} \geq \frac{99-81.1}{8.38}\right) \approx$

  $\approx 1 - \Phi\left(\frac{17.9}{8.38}\right) \approx 0.016$

- $P(X \geq 100) = P(X \geq 99.5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{18.4}{8.38}\right) \approx 0.14$

  (Handkorrektion, används i problemsamlingen)

Stokastiska processer

Def 1.1:

En stokastisk process är en familj av s.v.

$$\{X(t);\ t \in T\},$$

definierade på samma Ω, och indexerade av en indexmängd T.

Kommentar:

1) T är oftast något av:

- $\mathbb{Z}$ (heltalen) eller $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
  Då kallas $\{X(t);\ t \in T\}$ en process i diskret tid.
- $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$.
  Då kallas $\{X(t);\ t \in T\}$ en process i kontinuerlig tid

2) $X(t)$ kallas processens värde vid tid $t \in T$ (alternativ: tillstånd vid tid $t \in T$)

3) För varje fixt $\omega \in \Omega$ kan man definiera en funktion från T till $\mathbb{R}$, genom

$$T \ni t \mapsto X(t, \omega).$$

Dessa funktioner kallas realiseringar eller trajektorier.

Ex:

Låt X och Y vara s.v. Låt

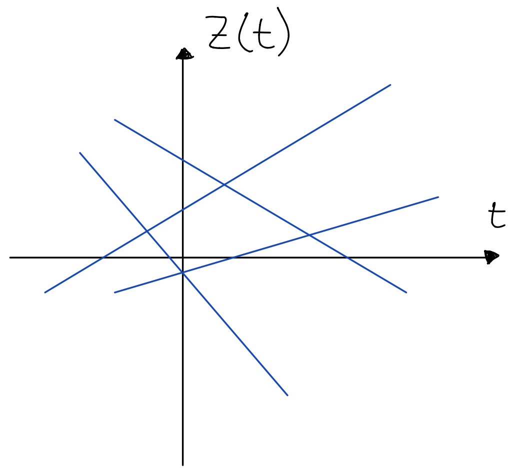
$$Z(t) = Xt + Y \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Då är

$$\{Z(t);\ t \in \mathbb{R}\}$$

en stokastisk process (i kontinuerlig tid)

Trajektorier:



Ex:

Låt

$$W(t) = X\sin(t+Y) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poisson processen

Def 2.1

En Poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$ är en stokastisk process

$$\{X(t);\ t \geq 0\}$$

med följande egenskaper:

1) $X(t)$ är ett ickenegativt heltal för varje $t \geq 0$, och

$$X(0) = 0.$$

2) $\{X(t);\ t \geq 0\}$ har ickeavtagande trajektioner.

3) Låt

$$(t_1, t_1+h_1],\ (t_2, t_2+h_2], \dots, (t_k, t_k+h_k]$$

vara disjunkta tidsintervall (ej överlappande). Då är

$$X(t_1+h_1) - X(t_1),\ X(t_2+h_2) - X(t_2), \dots,$$
$$X(t_k+h_k) - X(t_k)$$

oberoende s.v.

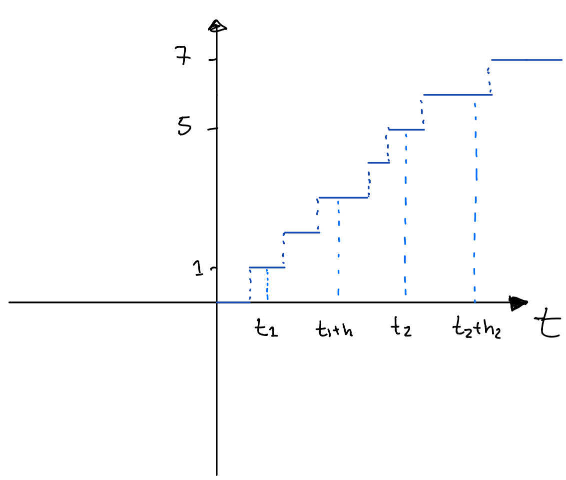
4) $P(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ då $h \to 0$

OBS:

$$\frac{o(h)}{h} \to 0,\quad h \to 0.$$

5) $P(X(t+h) - X(t) > 1) = o(h)$ då $h \to 0$

Realiseringar:



SATS 2.1

Låt

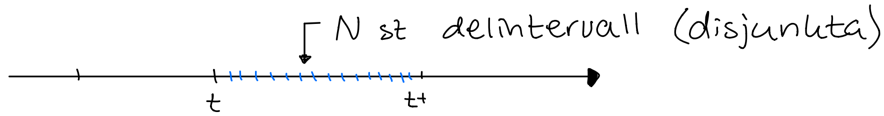
$$\{X(t); t \geq 0\}$$

vara en Poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$. Då gäller:

$$X(t+h) - X(t) \sim Po(\lambda h) \quad \forall t, h \geq 0.$$

Bevisskiss

$$X(t+h) - X(t) = \sum_{i=1}^{N} X\left(t + \frac{ih}{N}\right) - X\left(t + \frac{(i-1)h}{N}\right),$$



där termerna är oberoende s.v (egenskap 3).
Vidare är

$$P\left(X\left(t+\frac{ih}{N}\right) - X\left(t + \frac{(i-1)h}{N}\right) = x\right) \overset{N \text{ stort}}{\approx} \begin{cases} \frac{\lambda h}{N}, & x = 1 \\ 0, & x \geq 0 \\ 1 - \frac{\lambda h}{N}, & x = 0 \end{cases}$$

För N stort får vi därför:

$$X(t+h) - X(t) \approx Bin\left(N, \frac{\lambda h}{N}\right) \approx Po\left(N \cdot \frac{\lambda h}{N}\right) = Po(\lambda h)$$

SATS 2.2

Låt

$$\{X(t); t \geq 0\}$$

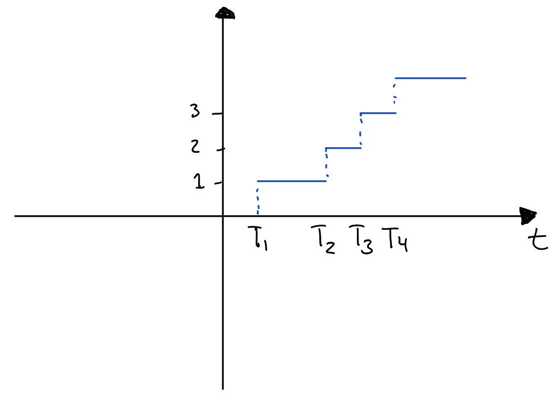
vara en Poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$. Låt

$$T_0 = 0,\quad T_k = \inf\{t > 0;\ X(t) = k\},\quad k = 1, 2, \dots$$

Då gäller att:

$$T_1,\ T_2 - T_1,\ T_3 - T_2, \dots$$

är oberoende, $\exp(\lambda)$- fördelad s.v.



Bevis, av att $T_1 \sim \exp(\lambda)$:

Enligt def är $T_1 > 0$. Antag $t > 0$.

$$P(T_1 \leq t) = P(\underbrace{X(t)}_{\sim Po(\lambda t)} \geq 1) = 1 - P(X(t) = 0) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}.$$

Alltså

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > \end{cases}$$

9.3

$X(t)$ = antal olyckor under tiden $[0, t]$, $\forall\, t \geq 0$

$\{X(t);\ t \geq 0\}$ är en Poissonprocess, med intensitet $\lambda = 0.1$ (per dag).

Beräkna:

$$P(X(10) \leq 3)$$

Sats 2.1 =>

$$\underline{X}(10) - \underline{X}(0) \sim Po(\lambda \cdot 10) = Po(1)$$

$$P(\underline{X}(10) \le 3) = \sum_{x=0}^{3} p_{\underline{X}(10)}(x) = \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-1} \cdot 1^{x}}{x!} = \frac{e^{-1} \cdot 16}{6} \approx 0.98.$$

9.8

Låt

$$\begin{cases} \underline{X}(t) = \text{antal kunder som ankommer till A} \\ \qquad \text{under tiden } [0,t],\ t \ge 0. \\ \underline{Y}(t) = \text{antal kunder som ankommer till B} \\ \qquad \text{under tiden } [0,t],\ t \ge 0. \end{cases}$$

$\{\underline{X}(t), t \ge 0\}$ är en Poissonprocess med intensitet 12 (per timme)

$\{\underline{Y}(t), t \ge 0\}$ är en Poissonprocess med intensitet 8 (per timme)

Oberoende processer.

Beräkna

$$P(7.9\,\underbrace{\underline{X}(7)}_{\sim Po(12 \cdot 7)} > 9.5\,\underbrace{\underline{Y}(7)}_{\sim Po(8 \cdot 7)}).$$

Approximation!

Låt

$$Z = 7.9\,\underline{X}(7) - 9.5\,\underline{Y}(7)$$

$$\begin{cases} 12 \cdot 7 \geq 15 \Rightarrow X(7) \approx N(84, \sqrt{84}) \\ 8 \cdot 7 \geq 15 \Rightarrow Y(7) \approx N(56, \sqrt{56}) \end{cases}$$

$Z \approx N(\quad , \quad)$

Beräkna sedan

$P(Z>0)$ och nu är klockan 10:07.