Föreläsning 1

TANA21 – Beräkningsmatematik

Intro och felanalys

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

FELANALYS

Def:

- exakt värde: a $\quad a = 1{,}25 \pm 0{,}01$
- närmevärde: $\bar{a}$ $\quad \bar{a} = 1{,}25$
- absolut fel: $\Delta a = \bar{a} - a$ vi känner bara $|\Delta a| \leq 0{,}01$
- relativt fel: $\frac{\Delta a}{a} \approx \frac{\Delta a}{\bar{a}}$ $\quad \left|\frac{\Delta a}{a}\right| \lessapprox \frac{0{,}01}{1{,}25} = 8 \cdot 10^{-3}$

strikt $\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \leq \frac{0{,}01}{1{,}25 - 0{,}01} \leq 8{,}1 \cdot 10^{-3}$

Relativa fel > 1 vill vi inte ha.

Korrekta decimaler och signifikanta siffror

om $|\Delta a| \leq \underbrace{0{,}5}_{\text{nogut}} \cdot 10^{-t}$ har $\bar{a}$, t k.d

De korrekta decimalerna plus en heltalssiffror men utan inledande nollor, är signifikanta siffror.

Ex:

$a = 1{,}25 \pm 0{,}01$, $|\Delta a| \leq 0{,}01 = 0{,}1 \cdot 10^{-1} \Rightarrow 1$ kd

$\bar{a} = 1{,}2|5$ antal s.s: 1 + 1

heltal kd.

$b = 1234 \pm 2$ $\quad |\Delta b| \leq 0{,}2 \cdot 10^{1}$ ingen kd.

$\bar{b} = 1234$ antal ss $4 - 1 = 3$

- Korrekta decimaler uttrycker absoluta felets storlek.
- Signifikanta siffror uttrycker noggrannhet.

motsvarande relativt fel.

FELKÄLLOR

Fel vid numeriska beräkningar kan komma från olika håll:

(- modelleringsfel)

- indata (mätfel, avrundning tex $\pi = 3{,}14$)
- trunkeringsfel, R_T

ex, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{x^k}{k!}$

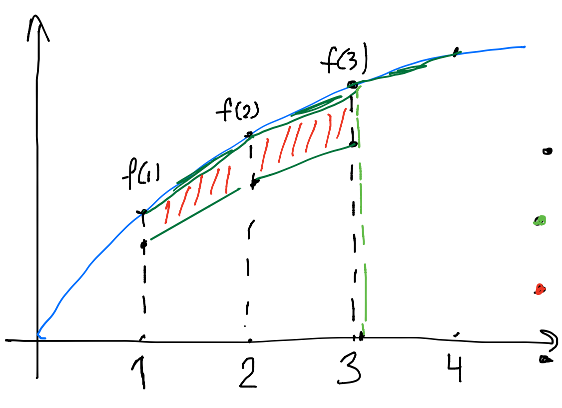
$$y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \quad h>0$$

- avrundning i dator
- avrundning av utdata, R_B

Dessa kan fortplanta sig till resultatet.

Ex:

$$I = \int_1^b f(x)\,dx \quad \text{där } b = 3 \pm 0{,}2$$



- R_T
- fel från b
- fel från funktionsvärdena
- avrundning av svaret.

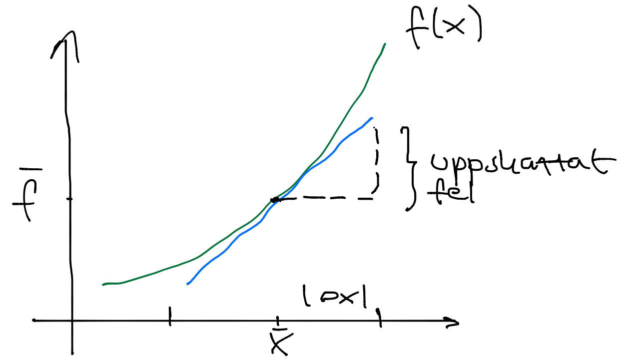
FELFORTPLANTNING

$f = f(x)$ tex $f = \cos(x)$.

Vi har $\Delta x = \bar{x} - x$ medelvärdessatsen. $\xi \in [\bar{x}, x]$

$$\Delta f = \bar{f} - f = f(\bar{x}) - f(x) = f'(\xi)(\bar{x} - x) \approx f'(\bar{x}) \cdot \Delta x$$

$$|\Delta f| \approx |f'(\bar{x})| \cdot |\Delta x|$$



* Gäller för små $|\Delta x|$
* Avrunda uppåt ger säkerhetsmarginal

$f = f(x, y)$

• Maximalfeluppskattning

$$|\Delta f| \approx\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \Delta y\right|$$

På samma sätt för $f(x, y, z)$.

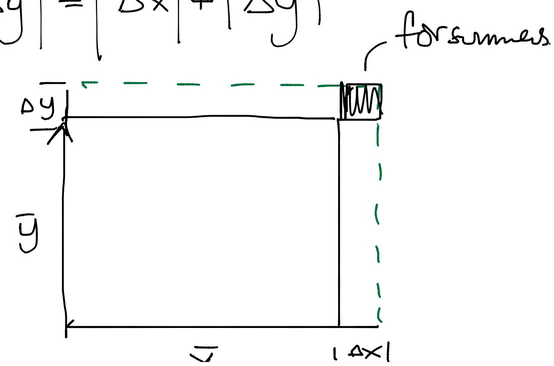
Låt $f = x + y$ eller $f = x - y$

Vi får $|\Delta f| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right| = |\Delta x| + |\Delta y|$

• Felen adderas!

Låt $f = x \cdot y$

Vi får $|\Delta f| \lessapprox |\bar{y} \cdot \Delta x| + |\bar{x} \Delta y|$



Problem 1: Beräkna

$A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ med felgräns

$r = 1{,}00 \pm 0{,}05$, $\alpha = \pm\, 0{,}11 \pm 0{,}005$ ca 5% fel

Sätt $f = f(r,\alpha) = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$,

$f(\bar{r},\bar{\alpha}) = 1{,}1085\ldots \cdot 10^{-4}$

$$|\Delta f| \lessapprox \left|\frac{\partial f}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta\alpha\right| = \left|r(\alpha - \sin\alpha)\cdot\underbrace{\Delta r}_{0{,}05}\right| + \left|\frac{\bar{r}^2}{2}(1-\cos\alpha)\underbrace{\Delta\alpha}_{0{,}005}\right|$$

$\le 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ (2-3 siffror).

↑
höj

Avrundning: $\bar{A} = 1{,}11 \cdot 10^{-4}$ ger $|R_B| \le 0{,}15 \cdot 10^{-6}$

ger $|\Delta A| \le 2{,}7 \cdot 10^{-5} + 0{,}15 \cdot 10^{-6} \le 2{,}8 \cdot 10^{-5}$

Svar: $A = 0{,}000111 \pm 0{,}000028$ ca 26% fel