Föreläsning 4

TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Linjär programmering

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

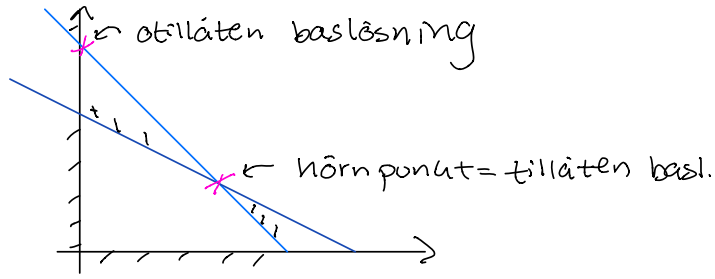
SATS:

$\bar{x}$ är en hörnpunkt till mängden

$$\{x \mid Ax = b \text{ och } x \geq 0\}$$

Omm $\bar{x}$ är en baslösning till systemet

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$



SATS:

Om problemet

$$z^* = \min \; z = c^T x$$
$$\text{då } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

har ändligt optimalvärde ($z = \pm\infty$) så antas det i minst en tillåten baslösning

Hur många tillåtna baslösningar?
Växer som $\binom{n}{m}$. Många!

Hur avsöka effektivt?

Algebraisk omskrivning av LP-problem

(LP) $z^* = \min z = c^T x$

$$\text{då } Ax = b \qquad A \sim m \times n$$
$$x \geq 0$$

Låt

kolumn

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

och

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$$

antar linjärt oberoende

Antas att en tillåten baslösning är känd.

Antas att

$$J = \{1, 2, \ldots, m\}$$

Basvariabler:

$$x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$$

Icke basvariabler

$$x_N = (x_{m+1}, \ldots, x_n)^T$$

$B = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ (baskolumner)

$N = (A_{m+1}, \ldots, A_n)$ (icke baskolumner)

$c_B = (c_1, \ldots, c_m)^T$

$c_N = (c_{m+1}, \ldots, c_n)^T$

Alltså:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad A = (B, N), \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

Då är (LP) $\Leftrightarrow$ $z^* = \min z = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

$$\text{då} \quad (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^* = \min z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}^T = (c_B^T, c_N^T)$ då $Bx_B + Nx_N = b$

$$x_B, x_N \geq 0$$

Men,

$$Bx_B + Nx_N = b \underset{\substack{\text{multi} \\ \text{med } B^{-1}}}{\Leftrightarrow} Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b.$$

Då fås

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N =$$
$$= c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

Ekvivalent problem

$$z^* = \min z = c_B^T B^{-1} b + 0^T x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\text{då} \quad I x_B + B^{-1} N x_N = \underbrace{B^{-1} b}_{\geq 0}$$

$$x_B, \quad x_N \geq 0$$

Tillåten baslösning:

$$x_N = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_B = B^{-1}b \geq 0 \\ z = c_B^T B^{-1} b \end{cases}$$

OBS:

Problemet är beskriven i en speciell bas!

$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ kallas reducerade kostnader.

Skrivs ofta

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T N \quad \text{där } y^T = c_B^T B^{-1}$$

Fördelar med nya formen:

- Om $\bar{c}_N^T \geq 0$ så fås att

$$z = c_B^T B^{-1} b + \underbrace{\bar{c}_N^T}_{\geq 0} \underbrace{x_N}_{\geq 0} \geq c_B^T B^{-1} b$$

för alla $x_N \geq 0 \Rightarrow$ optimum

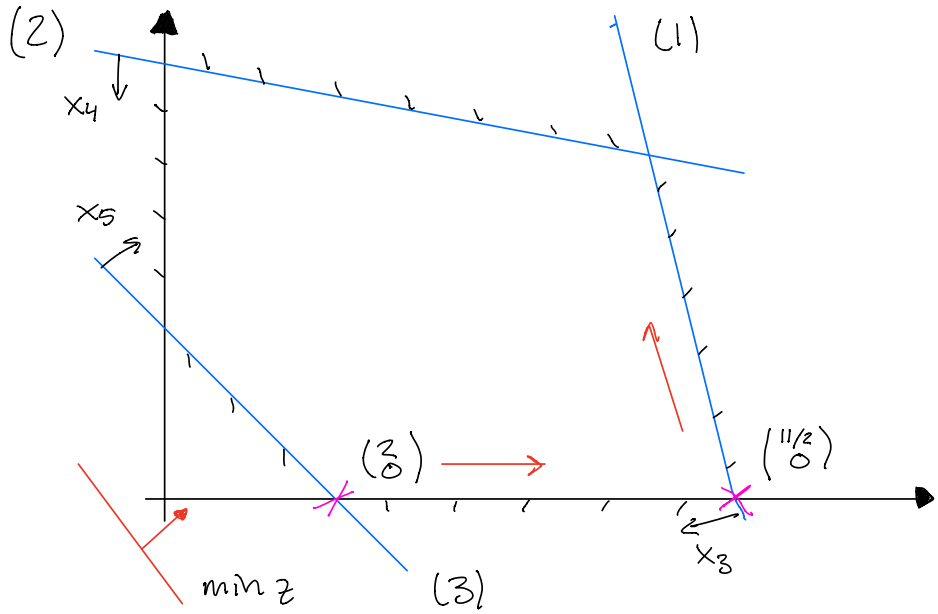
- Annars: lätt att finna en bättre tillåten baslösning

Ex:

$$z^* = \min z = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{då} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 11 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 13 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 2 \\ x_1, \ldots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_3, x_4, x_5 är slackvariabler.



Först:

Besteriv problemet i basen som svarar mot

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = -2$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_2 & x_5 \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (= x_B)$$

$$c_B^T B^{-1} b = \underset{x_1}{(-1}, \underset{x_3}{0}, \underset{x_4}{0)} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = -2 \quad (= z)$$

slackvariabler = 0

$$y^T = c_B^T B^{-1} = (-1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, -1)$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T N = \underset{x_2}{(-2}, \underset{x_5}{0)} - (0, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2, 0) - (-1, 1) = (-1, 1)$$

Alltså:

$$z^* = \min z = -2 - x_2 - x_5$$

$$\text{då} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 2 \\ -x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 &= 7 \\ 2x_2 + \qquad x_4 + x_5 &= 11 \\ x_1, \ldots\ldots\ldots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\bar{c}_N^T = (-1, 1) \not\geq 0 \Rightarrow$ inte optimum

Om x_2 eller x_5 ökar (från noll) $\Rightarrow z$ minskar

Välj att öka x_5 (och behåll $x_2 = 0$). Kallas inkommande basvariabel.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + x_5 \geq 0 \\ x_3 = 7 - 2x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \leq 7/2 \\ x_4 = 11 - x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \leq 11/1 \end{cases} \Rightarrow x_5 \leq \min\left\{\frac{7}{2}, \frac{11}{1}\right\}$$

$$\underset{\min z}{\Rightarrow} x_5 = \frac{7}{2} \Rightarrow x_3 = 0, \; x_3 \text{ - utgående basvariabel}$$

Ny baslösning:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 7/2 \\ 7/2 \\ 11 - 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Och

$$x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

med

$$z = -2 - 1 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{11}{2}$$

Optimum?

Beskriv problemet i nya basen! Använd radoperationer.

$$\begin{cases} -z - x_2 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ -x_2 + x_3 + 2x_5 = 7 \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$$

$\times \frac{1}{2}$ $\times \frac{1}{2}$ $\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\times\ 1/2$

$$\begin{cases} -z - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 11/2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 11/2 \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_5 = 7/2 \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 15/2 \end{cases}$$

Bestämning i nya basen:

$\bar{c}_2 = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow$ inte optimum

x_2 inkommande!

$\min\left\{\frac{11/2}{1/2}, \frac{15/2}{5/2}\right\} = \frac{15/2}{5/2} \Rightarrow x_4$ utgående

Tabláversion:

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde
$-z$	1		$-3/2$	$1/2$			$11/2$
x_1		1	$1/2$	$1/2$			$11/2$
x_5			$-1/2$	$1/2$		1	$7/2$
x_4			$5/2$	$-1/2$	1		$15/2$

$\times \frac{1}{5}$ $\times \frac{1}{5}$ $\times \frac{3}{5}$ $\times \frac{2}{5}$

Ger ny tablå, som är optimum