Föreläsning 13

TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Lagranges-dualitet

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Observation:

Ett optimeringsproblem kan ofta betraktas som ett relativt lättlöst problem med komplicerade sidovillkor.

Ex:

$$\max z: \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq b \qquad \text{(ett villkor)} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = K \qquad (k \text{ heltal}, \ 1 \leq K \leq n-1) \quad (2)$$

$$x_j = 0/1, \ \forall j \quad (3)$$

Kappsäcksproblem där exakt K stycken $x_j = 1$.
(1) är komplicerade sidovillkor, ty utom (1) löses problemet genom att finna de K största c_j och sätta motsvarande $x_j = 1$

Problem:

$$f^* = \min f(x)$$

$$(P) \qquad \text{då} \quad g(x) \leq 0 \mid u \geq 0$$

$$x \in X$$

där

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_i(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

Antag att min-problem över endast X är lättlösta, dvs $g(x) \leq 0$ komplicerar.

Strategi:

Ta hänsyn till $g(x) \leq 0$ implicit mha multiplikatorer $k \geq 0$

Bilda Lagranges-funktionen

$$L(x, u) = f(x) + u^T g(x) = f(x) + \sum_{i=}^{m} u_i g_i(x)$$

Lagranges-relaxerat problem:

$$\min_{x \in X} L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$$

(eller Lagrange-subproblem)

Låt $X(u) = \{ x \mid x \text{ är optimal} : \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x) \}$

Låt $x(u) \in X(u)$ ($x(u)$ är någon optimallösning)

Obs:

$$x(u) \in X(u) \subseteq X$$

Typiskt gäller att $g(x(u)) \nleq 0$ (dvs $x(u)$ otillåten i (P)).

Om $g(x(u)) \leq$ gäller:
$x(u)$ tillåten i (P) $\Rightarrow$

$$f^* \leq f(x(u))$$

Låt

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x)$$

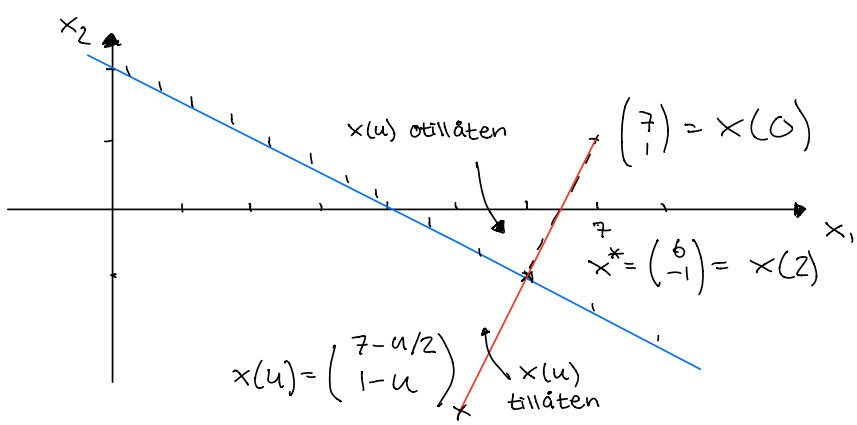
EX:

$$f^* = \min f(x) = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 1)^2$$

då $g(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \quad | u \geq 0$

$x \in \mathbb{R}^2 \quad (= X)$

$$\left[x^* = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f^* = 5 \right]$$



$$L(x, u) = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 1)^2 + u(x_1 + 2x_2 - 4) =$$
$$= -4u + (x_1 - 7)^2 + u x_1 + (x_2 - 1)^2 + 2u x_2$$

$$h(u) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} L(x,u) = -4u + \underbrace{\min_{x_1 \in \mathbb{R}} \{(x_1-7)^2 + u x_1\}}_{\text{konvext, obegränsat}}$$

separation

$$+ \underbrace{\min_{x_2 \in \mathbb{R}} \{(x_2-1)^2 + 2u x_2\}}_{\text{konvext, obegränsat}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\{(x_1-7)^2 + u x_1\} = 2(x_1-7) + u = 0 \Rightarrow x_1(u) = 7 - \frac{u}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\{(x_2-1)^2 + 2u x_2\} = 2(x_2-1) + 2u = 0 \Rightarrow x_2(u) = 1 - u$$

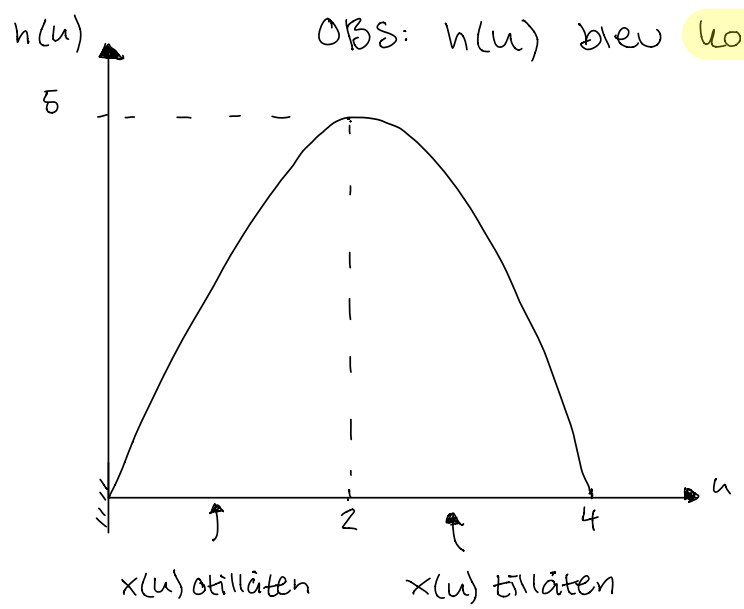
Alltså

$$x(u) = \begin{pmatrix} 7 - u/2 \\ 1 - u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad h(u) = -4u + (x_1(u)-7)^2 + u x_1(u) + (x_2(u)-1)^2 + 2u x_2(u) =$$

$$= 5u\left(1 - \frac{u}{4}\right)$$ (explicit! Ovanligt!)

OBS: $h(u)$ blev konkav!



SATS:

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ sluten och begränsad} \\ f \text{ och } g \text{ kontinuerlig på } X \end{array}\right\} \Rightarrow$$

h är ändlig, konkav och kontinuerlig på $\mathbb{R}^m$

[h ändlig: $h(u) > -\infty$, $\forall u$]

Poäng:

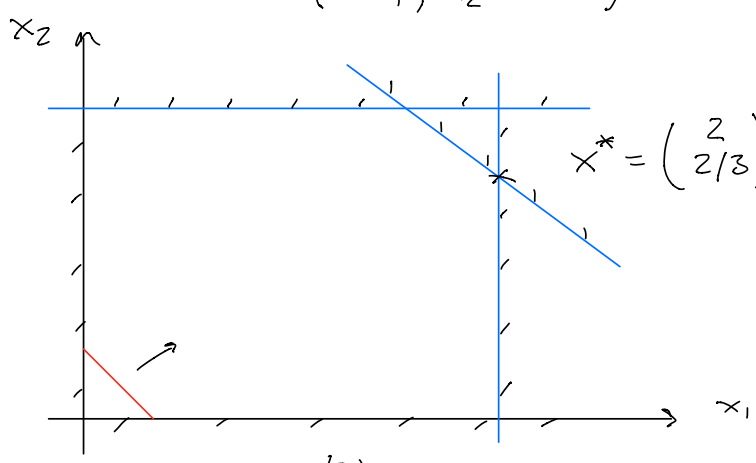
h är ofta inte differentierbar för alla u

Ex 2:

$$f^* = \max f(x) = x_1 + x_2$$

då

$$(P) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 & | \; u \ge 0 \\ \left.\begin{array}{l} x_1 \le 2 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} : X \end{cases}$$



$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow f^* = \frac{8}{3}$$

(P) max

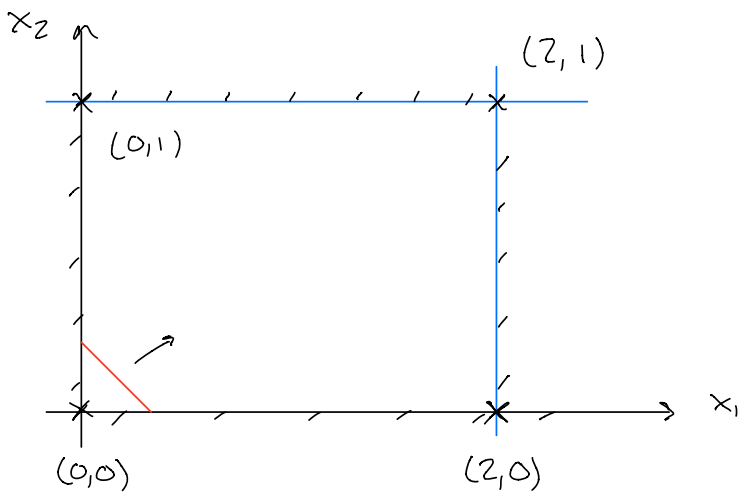
$$L(x, u) = x_1 + x_2 - u(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

$$h(u) = \max_{x \in X} L(x,u) = \max \; x_1 + x_2 - u(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

$$\text{då} \quad \begin{cases} x_1 \le 2 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

u fixt $\rightarrow$ LP i x_1 och x_2!

Optimum i hörnpunkt! Jämför hörnpunkter!

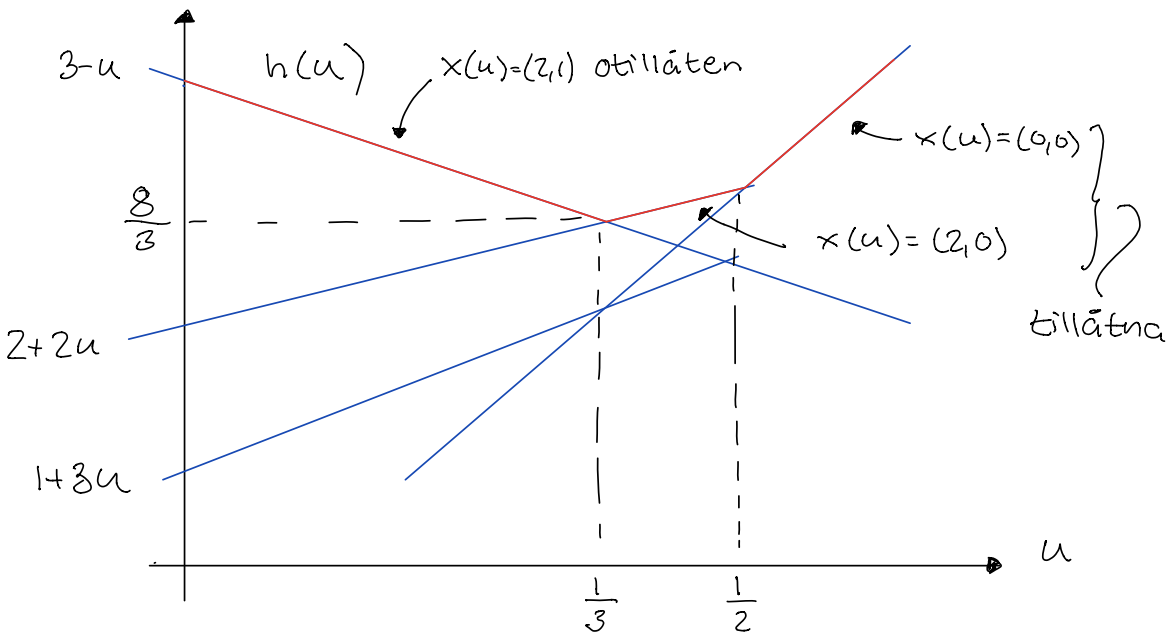


målfunktionsvärden:

$$(0,0): \; 0 - u(0-6) = 6u$$
$$(2,0): \; 2 - u(4-6) = 2 + 2u$$
$$(0,1): \; 1 - u(3-6) = 1 + 3u$$
$$(2,1): \; 3 - u(4+3-6) = 3 - u$$

Välj bästa hörnpunkten

$$h(u) = \max\{6u, \; 2+2u, \; 1+3u, \; 3-u\}$$



h blir styckvis linjär och konvex (ty (P) max).
Inte differentierbar för

$$u = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad u = \frac{1}{2}$$

Relationer mellan (P) och h?

SATS: Svag dualitet

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} \text{ tillåten i (P)} \\ \bar{u} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(\bar{u}) \leq f(\bar{x})$$

Bevis:

$\bar{x}$ tillåten $\Rightarrow \bar{x} \in X$ och $g(x) \leq 0$.

Då fås

$$h(\bar{u}) \overset{\text{(def)}}{=} \min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^T g(x) \overset{\bar{x} \in X}{\leq} f(\bar{x}) + \overbrace{\underbrace{\bar{u}^T}_{\geq 0} \underbrace{g(\bar{x})}_{\geq 0}}^{\geq 0} \leq f(\bar{x})$$

Följdsats:

$$h(u) \leq f^*, \quad \forall u \geq 0$$

Bevis:

Låt $\bar{x}$ vara optimal i (P)

Alltså:

För varje $u \geq 0$ är $h(u)$ en optimistisk skattning för f^*

Sök en **starkare** optimistisk skattning.
Starkast = högst

Alltså:

Finn

$$\text{(D)} \quad h^* = \max_{u \geq 0} h(u)$$

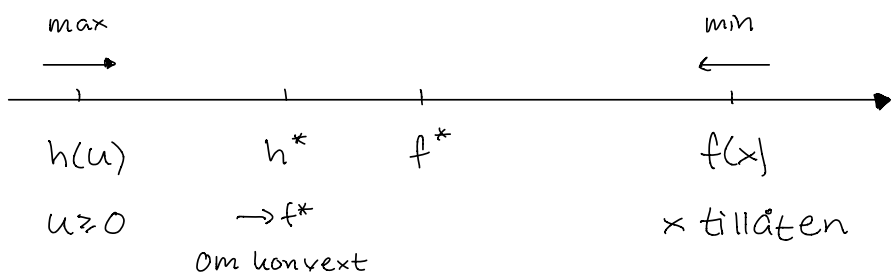
Lagrange-dualt problem!

Följdsats:

$$h^* \leq f^*$$

Bevis:

Låt u vara optimal i (D).



SATS: Stark dualitet

- Om (P) är ett konvextproblem och det finns $\bar{x} \in \underline{X}$ sådant att

$$g(\bar{x}) \leq 0$$

(inre punkt) så gäller att

$$h^* = f^*$$

- Om (P) är icke-konvext (tex heltalsproblem):

$$h^* < f^*$$

gäller typiskt.

$$f^* - h^* = \text{dual-gap}$$