Föreläsning 1

TAMS14 – Sannolikhetslära

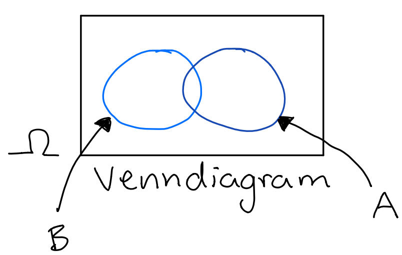
Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Sannolikhetlärans begrepp

Sannolikhetslära – ett matematiskt ämne, vars syfte är att beskriva och analysera slumpförsök.

Slumpförsök – "försök" vars resultat ej kan exakt förutsägas (uppvisar "slumpvariation"), exempelvis tärningskast.

Ω – utfallsrummet (mängden av alla "utfall" av ett slumpförsök).

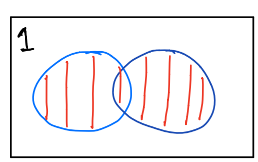


Varje delmängd $A \subset \Omega$ kallas en händelse.

Mängdlärans operationer

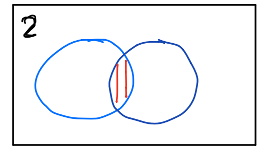
Låt $A \subset \Omega$ och $B \subset \Omega$.

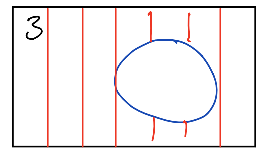
1) $A \cup B$ – unionen av A och B = mängden av alla element som ingår i åtminstone en av A och B.



2) $A \cap B$ – snittet av A och B = mängden av alla element som ingår i både A och B.

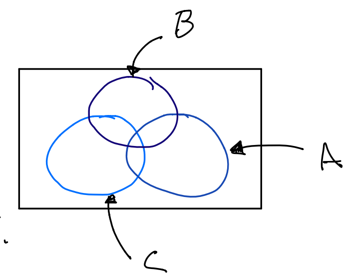
3) A^c - komplementet till A = mängden av alla element som inte ingår i A.





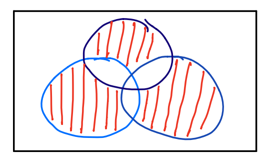
4) $\emptyset$ - tomma mängden = Ω^c

1.1 A, B, C är händelser i Ω.
Utryck följande händelser medelst A, B, C och mängdlärans operationer.

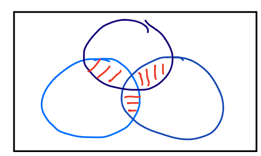


a) H_1 = "åtminstone en av A, B, C inträffar" = $A \cup B \cup C$

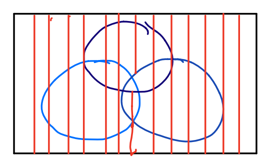
b) H_2 = "exakt en av A, B, C inträffar" =
$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$



c) H_3 = "exakt två av A, B, C inträffar" =
$= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$



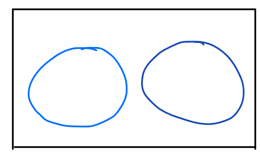
d) H_4 = "högst två av A, B, C inträffar" =
$= A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cup B \cup C)^c$



Sannolikheter

Varje händelse $A \subset \Omega$ har en sannolikhet $P(A)$.
Dessa uppfyller Kolmogorovs axiom:

1) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subset \Omega$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Om $A \cap B = \emptyset$
   (A och B är "disjunkta")
   Så är $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



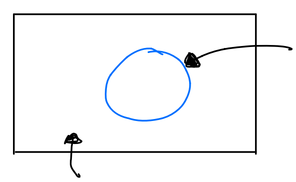
3') Om $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är en oändlig följd händelser så att $A_i \cap A_j \neq O$ då $i \neq j$, så gäller:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Viktiga satser

SATS 2.1, Komplementsatsen

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



Bevis:

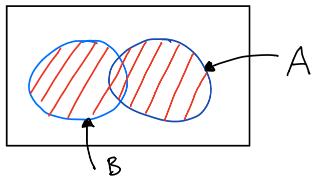
Def. av A^c ger att: $\begin{cases} A \cup A^c = \Omega \\ A \cap A^c = \emptyset \end{cases}$

Axiom 2 och 3 ger

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

SATS 2.2, Additionssatsen för två händelser

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

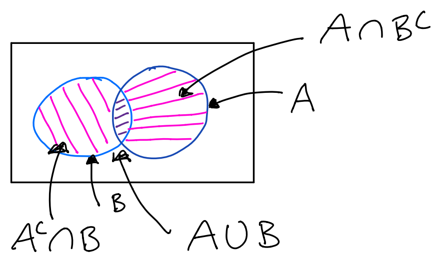


Bevis:

$$A \cup B = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)}_{\text{Disjunkta}}$$

Disjunkta

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$
$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = P(A \cup B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \end{cases}$$

SATS, Additionssatsen för 3 händelser

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

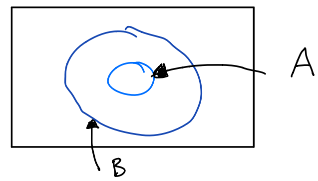
SATS 2.3 Booles olikhet

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

SATS

Låt $A \subset B$. Då är

$$P(A) \leq P(B)$$



Bevis:

$$B = \underbrace{A}_{} \cup \underbrace{(B \cap A^c)}_{} \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

Disjunkta

Ändliga utfallsrum med lika sannolika utfall

SATS:

Låt Ω vara ett utfallsrum med m st utfall, som alla har samma sannolikhet p. Då är

$$p = \frac{1}{m}.$$

Bevis:

Disjunkta

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_m\},$$

där $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ är utfallen. Axiom 2 och 3 $\Rightarrow$

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_m) = p + p + \ldots + p = mp$$

SATS: Klassisk sannolikhetsdefinitionen

Låt Ω vara ett utfallsrum med m st. lika sannolika utfall. Låt $A \subset \Omega$. Då är

$$P(A) = \frac{g(A)}{m},$$

där $\begin{cases} m = \text{antal utfall i } \Omega \text{ ("möjliga")} \\ g(A) = \text{antal utfall i } A \text{ ("gynnsamma")} \end{cases}$

Bevisidé

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{g(A)\text{ st.}} = \frac{g(A)}{m}$$

Ex 1: Två kast med en tärning

A = "summan av prickarna ≤ 3".

Beräkna $P(A)$.

$$\Omega = \{(k,l);\ k = 1,\dots,6;\ l = 1,\dots,6\}.$$

Lika sannolika utfall ⇒

$$P(A) = \frac{g(A)}{m},$$

där: $\left.\begin{cases} m = 6 \cdot 6 = 36 \\ g(A) = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Ex 2: Dra två kort ur en lek, utan återläggning.

A = "båda korten är spader"

Ω = alla sätt att dra 2 kort av 52, utan återläggning, med hänsyn till återläggning.

Lika sannolika utfall ⇒

$$P(A) = \frac{g(A)}{m},$$

där $\left\{ \begin{array}{l} m = 52 \cdot 51 \\ g(A) = 13 \cdot 12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{1}{17}$

Kombinatorik

Multiplikationsprincipen:

k åtgärder ska utföras i följd. Om den i:te åtgärden kan utföras på n_i sätt, oberoende av hur de föregående utförts, (för $i = 1, 2, \ldots, k$), så är det totala antalet sätt att utföra alla åtgärderna: $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Formler:

Låt en mängd innehålla n st element. Antal sätt att dra k st element ur mängden är:

1) Om dragning sker utan återläggning, med hänsyn till ordning:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2) Om dragning sker utan återläggning, utan hänsyn till ordning:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3) Om dragning sker med återläggning, med hänsyn till ordning:

n^k.

2.5 Dra 5 kort ur en lek, utan återläggning.

A= "korten har lika valörer"

Ω= alla sätt att dra 5 kort, utan återläggning, med hänsyn till ordning: Lika sannolika utfall =>

$$P(A) = \frac{g(A)}{m}$$

$$\left.\begin{aligned} m &= 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \\ g(A) &= 52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36 \end{aligned}\right\} =$$

$$= P(A) = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0{,}507$$

Alternativ lösning:

Ω= alla andra sätt dra 5 kort, utan återläggning, utan hänsyn till ordning: Lika sannolika utfall =>

$$P(A) = \frac{g(A)}{m}$$

antal sätt att välja 5 valörer

$$m = \binom{52}{5} \quad g(A) = \binom{13}{5}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{(13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4^5)/5!}{(52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 48 \cdot 48)/5!} = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

som förut.