Sammanfattning TMME27

Fö1: Kinematik

Def Stelkropp: Föremål där avstand mellan kroppsfasta punkter är konstant $\forall t$

Modell: Kontinuum beskriver stelkroppar, "c" Kontinuerlig, homogen massfördelning

$$\text{massan}_{\text{stelkropp}} = \int_{\Omega_{\text{stelkropp}}} \rho \, dV$$

Villkor Stelkropp $\Rightarrow$ $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$ (A & B godt. pkter & $\omega \in$ stelkropp)

Fö2: Kinematik

Def Momentancentrum (M.C.) är en punkt (C) där hastigheten momentant är $\bar{0}$. M.C.:s läge kan härledas, om hastigheten är känd i två punkter i kroppen, som skärningspunkten mellan punkthastigheternas normaler.

Innebörd: M.C. $\Rightarrow$ $\bar{V}_C = 0$, ($a_C \neq 0$ i allmänhet) $\Rightarrow$ $\bar{V}_A = \bar{\omega} \times \bar{CA}$

Teoriuppgift 1: Visa att $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB}) + \bar{\alpha} \times \bar{AB}$ givet $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$

$\bar{a}_B = \dot{\bar{V}}_B = \dot{\bar{V}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{AB} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{AB}}$

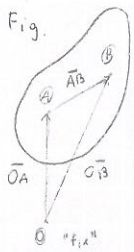


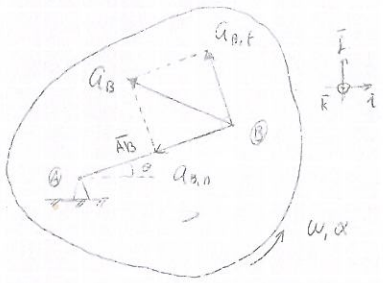
Fig. $\Rightarrow$ $\bar{OB} = \bar{OA} + \bar{AB}$ $\Rightarrow$ {derivera} $\Rightarrow$ $\overset{=V_B}{\dot{\bar{OB}}} = \overset{=V_A}{\dot{\bar{OA}}} + \dot{\bar{AB}}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \dot{\bar{AB}}$ $\Rightarrow$ {Givet $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$} $\Rightarrow$ $\dot{\bar{AB}} = \bar{\omega} \times \bar{AB}$

$\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$ $\Rightarrow$ $\dot{\bar{\omega}}(t) = \bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}$

"c" $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB}) + \bar{\alpha} \times \bar{AB}$

Specialfallet "plan rörelse & rotation kring fix axel (pkt fix i kropp & rum)



Ⓐ fix i rum och kropp $\Leftrightarrow$ $A = M.C$ & $\bar{a}_A = 0$

$\begin{cases} \bar{\omega} = \omega \bar{k} \\ \bar{\alpha} = \alpha \bar{k} \end{cases}$, $\bar{AB} \in xy$-plan $\Rightarrow$ $\bar{AB} \perp \bar{\omega}, \bar{\alpha}$, $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB}) + \bar{\alpha} \times \bar{AB}$

$|\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB})| = |\bar{\omega}||\bar{\omega} \times \bar{AB}| \sin 90^\circ = |\bar{\omega}||\bar{\omega}||\bar{AB}| \sin^2 90^\circ = |\omega^2||AB|$

$|\bar{\alpha} \times \bar{AB}| = |\bar{\alpha}||\bar{AB}| \sin 90^\circ = |\bar{\alpha}||AB|$

$a_{B,t} \perp \bar{AB} \perp \bar{\alpha}$ så $\bar{a}_{B,t} = \bar{\alpha} \times \bar{AB}$ & $a_{B,n} \perp (\bar{\omega} \times \bar{AB}) \perp \bar{\omega}$ så $\bar{a}_{B,n} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB})$

Elementarfall: Karosselekvationen: En punkt i cirkelrörelse kring fix axel har $a_n = \omega^2 l$ & $a_t = \alpha l$ där l är längd på axel

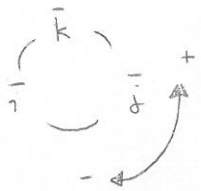
riktad mot axel — riktad tangentiellt

Fö 3 Räkneföreläsning 1 ; Momentancentrum , 5*, 6*, 5/41, 5,109, 5/40

Metoder för kryssprodukt

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$



Fö 4 Plan kinematik

Def: rörelsemängd, $\bar{G}$, är ett mått på hur svårt det är att ändra ett objekts translationsrörelse.

$$\bar{G} = \int \bar{v}\, dm = m \cdot \bar{v}_G$$

Def: rörelsemängdsmoment, $\bar{H}$, är ett mått på hur svårt det är att ändra ett objekts rotationsrörelse. Den beror på val av referenspunkt.

$$\bar{H}_G = \int_{\Omega} \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm$$

Rörelselagarna Euler I (E1) beskriver translation &
Euler II (E2) beskriver rotation

E1: $\sum \bar{F} = \dot{\bar{G}} = m \cdot \bar{a}_G$

E2: $\sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G = \bar{I}_G \bar{\omega}$, $\bar{I}$

Def: Trögheetsmoment, $\bar{I}$, är ett mått på rotationströgheten för en given kropp runt en given axel:

Det krävda vridmomentet för en förändring av rörelsemängdsmomentet $\bar{H}$ är proportionelligt mot trögheetsmomentet $\bar{I}$. Den spelar alltså samma roll som massan för translationsrörelser.

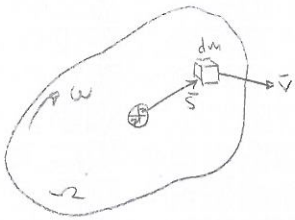
Specialfall: En punktmassas rörelsemängdsmoment definieras

$$H_O = \bar{r} \times \bar{G} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Specialfall: Om plant problem föreligger fås att $\bar{H}_G = \bar{I}_G \omega \bar{k}$

Teoriuppgift 5: Bevis av $\bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm$ utgående från $\bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times \bar{v}\, dm$

$dm = \rho\, dV$



$$\int_\Omega s \times \bar{v} = \{ \bar{v} = \bar{v}_G + (\bar{\omega} \times \bar{s}) \} = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{v}_G + (\bar{\omega} \times \bar{s}))\, dm =$$

$$= \int_\Omega \bar{s} \times \bar{v}_G\, dm + \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm =$$

$$= \underbrace{\int_\Omega \bar{s}\, dm}_{=0} \times \bar{v}_G + \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm \quad \text{V.S.V.}$$

Teoriuppgift 6: Visa att $\bar{H}_G = \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm$ kan skrivas på formen $\bar{H}_G = I_G \bar{\omega}$ i 2D

Vi sätter $\bar{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ i ett högerorienterat ON-system vi får

$$\int_\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] dm = \int_\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} dm = \int_\Omega \begin{pmatrix} -\omega x z \\ -\omega y z \\ \omega (x^2 + y^2) \end{pmatrix} dm$$

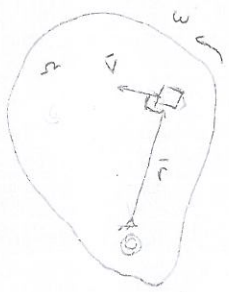
komponentvis: i: $\int_\Omega -\omega x z\, dm = \{ \text{symmetri kring } z \} = \iint -\omega x\, dx\, dy \cdot \overbrace{\int z\, dz}^{=0} = 0$

j: $\int_\Omega -\omega y z\, dm = \{ \text{symmetri kring } z \} = \iint -\omega y\, dx\, dy \cdot \underbrace{\int z\, dz}_{=0} = 0$

k: $\int_\Omega \omega (x^2 + y^2)\, dm = \omega \cdot \underbrace{\int_\Omega (x^2 + y^2)\, dm}_{I_G}$

$\therefore \quad \bar{H}_G = I_G \bar{\omega}$ V.S.V!

Teoriuppgift 7: Visa motsvarande i 6 att $\bar{H}_O = I_O \bar{\omega}$ i 2D där O är rums- & kroppsfix.



"plan kropp"

$$\bar{H}_O = \int_\Omega \bar{r} \times \bar{v}\, dm = \left\{ \begin{matrix} \text{Stel kropp} \Rightarrow \\ \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \end{matrix} \right\} = \int_\Omega \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dm =$$

$$= \{ \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a} \cdot \bar{b}) \} = \int_\Omega (\bar{\omega}\,(\bar{r} \cdot \bar{r}) - \bar{r}\,\underbrace{(\bar{r} \cdot \bar{\omega})}_{=0})\, dm$$

$$= \int_\Omega \bar{\omega}\, |\bar{r}|^2\, dm = \bar{\omega} \underbrace{\int_\Omega |\bar{r}|^2\, dm}_{= I_O} = I_O \bar{\omega} \quad \text{VSV!}$$

Alternativt som i uppg. 6

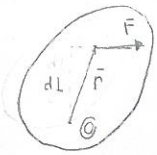
Teoriuppgift 2: Skillnad mellan kraftmoment, kraftparsmoment & momentsumma.

I Kraftmoment (Moment of force) <u>Def</u> $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = d_\perp |\bar{F}|$

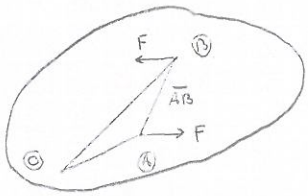
II Kraftparsmoment (Couple) <u>Def</u> $C = \bar{AB} \times \bar{F}$

III Momentsumma (Torque) <u>Def</u> $\sum \bar{M} = \sum_k \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum_i C_i$

I:

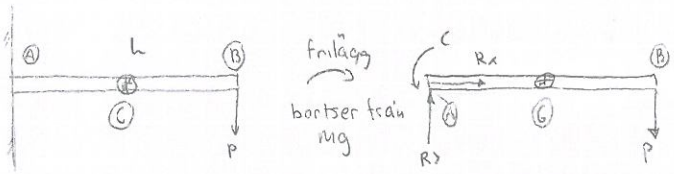


II



Kraftmoment är den vridande verkan en kraft har med avseende på en punkt. Kraftparsmoment är ett kraftpars vridande verkan, oberoende av angreppspunkt. Momentsumman är det vridmoment som uppstår om ett system reduceras m.a.p. en punkt. Kraftparsmoment har ingen translaterande verkan!

<u>Ex</u>



C vid frilägging nytt för stelkroppsproblem, pga att vi behöver behandla rotation!

P:s <u>kraftmoment</u>: $M_A = PL$, $M_G = P\frac{L}{2}$, $M_B = 0$

Momentsumma m.a.p G: $\sum M_G = R_y \frac{L}{2} + P\frac{L}{2} - C$

Teoriuppgift 3: Bevis av $\int_\Omega \bar{s}\, dm = 0$

Figur

$$\begin{cases} G\text{:s läge ges av } \bar{r}_G = \frac{\int_\Omega \bar{r}\, dm}{m} \\ \bar{r} = \bar{r}_G + \bar{s} \end{cases}$$

$\therefore$ $m\bar{r}_G = \int_\Omega (\bar{r}_G + \bar{s})\, dm = \int_\Omega \bar{r}_G\, dm + \int_\Omega \bar{s}\, dm = \int_\Omega r_G \rho\, dV + \int_\Omega \bar{s}\, dm =$

$= r_G \rho V + \int_\Omega \bar{s}\, dm = r_G m + \int_\Omega \bar{s}\, dm \Leftrightarrow \int_\Omega \bar{s}\, dm = \bar{0}$ VSV!

Teoriuppgift 4: Bevis av $\bar{G} = m \cdot \bar{v}_G$ utgående från $\bar{G} = \int_\Omega \bar{v}\, dm$

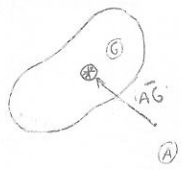
Utifrån kinematiskt samband gäller $\bar{v} = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s}$

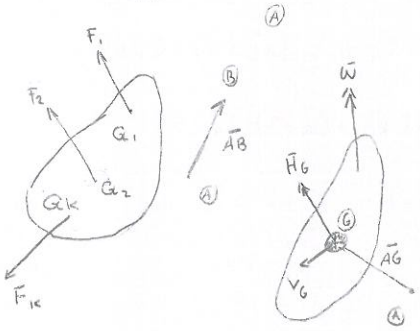
$\therefore$ $\int_\Omega \bar{v}\, dm = \int_\Omega (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{s})\, dm = \{\bar{\omega}$ är samma för alla punkter $\in$ stelkropp$\} =$

$= \int_\Omega \bar{v}_G dm + \bar{\omega} \times \int_\Omega \bar{s}\, dm = \{\int_\Omega \bar{s}\, dm = \bar{0}\} = \int_\Omega \bar{v}_G dm + \bar{\omega} \times \bar{0} = \int_\Omega \bar{v}_G\, dm = v_G \cdot m$

VSV!

Fö 5: Plan kinetik:





Def Tröghetsmomentet I_A definieras

$$I_A = \int_\Omega r^2 dm = \int_\Omega (x^2+y^2)\, dm$$

Förflyttningsregler

- För tröghetsmomentet I gäller $I_A = I_G + m \cdot |\bar{AG}|^2$
- För momentsumman gäller: $\sum \bar{M}_A = \sum M_B + \bar{AB} \times \sum \bar{F}$
- För rörelsemängdsmoment gäller: $\bar{H}_A = \bar{H}_G + \bar{AG} \times m\bar{V}_G$

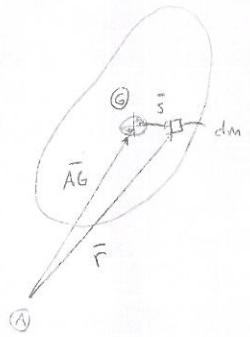
Momentlagen i 3D $\sum \bar{M}_A = \dot{\bar{H}}_G + \bar{AG} \times m \cdot \bar{a}_G$, A godt. pkt

Specialfall i 2D kan momentlagen skrivas enligt:

$\sum \bar{M}_A = I_G \alpha \pm m \cdot \bar{a}_G \cdot d\perp$ där $d\perp$ är ortogonalt avstånd från $\bar{a}_G$:s verkningslinje till punkten A & tecken administreras m.h.a hh-regeln.

Teoriuppgift 9: Bevisa Steiners sats utgående från definitionen av massröghetsmoment

$I_A = I_G + m|AG|^2$ (påstående)



Bevis: $I_A = \int_\Omega \bar{r}^2 dm = \{ \bar{r} \circ \bar{r} = |r|^2 \cos 0 \} =$

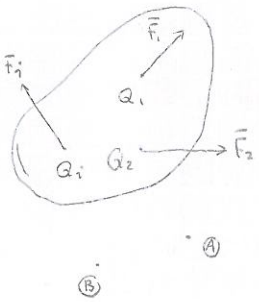
$= \int_\Omega \bar{r} \circ \bar{r}\, dm = \{ \bar{r} = \bar{AG} + \bar{s} \} = \int_\Omega (\bar{AG} + \bar{s}) \circ (\bar{AG} + \bar{s})\, dm =$

$= \int_\Omega (|\bar{AG}|^2 + 2\bar{AG} \circ \bar{s} + |s|^2)\, dm = \underbrace{\int_\Omega |\bar{AG}|^2 dm}_{|\bar{AG}|^2 m} + 2\bar{AG} \circ \underbrace{\int_\Omega \bar{s}\, dm}_{=0} + \underbrace{\int_\Omega |s|^2 dm}_{I_G} =$

$= I_G + m|\bar{AG}|^2$

Teoriuppgift 10: Bevisa förflyttningssatsen för momentsumma

Påstående: $\sum \bar{M}_B = \sum \bar{M}_A + \bar{BA} \times \sum \bar{F}$

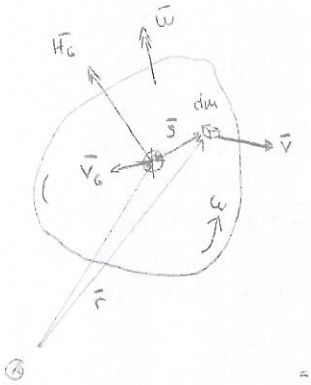


$\sum \bar{M}_B = \sum_i \bar{BQ}_i \times \bar{F}_i = \{ \bar{BQ}_i = \bar{BA} + \bar{AQ}_i \} = \sum_i (\bar{BA} + \bar{AQ}_i) \times \bar{F}_i =$

$= \sum_i \bar{BA} \times \bar{F}_i + \sum_i \bar{AQ}_i \times \bar{F}_i = \{ \sum \bar{M}_A = \sum \bar{AQ}_i \times \bar{F}_i \ \& \ \bar{BA} \text{ konstant} \} =$

$= \sum \bar{M}_A + \bar{BA} \times \sum \bar{F}.$

Teoriuppgift 11: Visa förflyttningssatsen för rörelsemängdsmoment utgående från definition av $\bar{H}$



Påstående $\bar{H}_A = \bar{H}_G + \bar{AG} \times m\bar{v}_G$

Bevis: $\bar{H}_A = \int_\Omega \bar{r} \times \bar{v}\, dm = \{ \bar{r} = \bar{AG} + \bar{s} \} = \int_\Omega (\bar{AG} + \bar{s}) \times \bar{v}\, dm =$

$= \{ \bar{v} = \bar{v}_G + (\bar{\omega} \times \bar{s}) \} = \int_\Omega (\bar{AG} + \bar{s}) \times (\bar{v}_G + (\bar{\omega} \times \bar{s}))\, dm =$

$= \bar{AG} \times \bar{v}_G \underbrace{\int_\Omega 1\, dm}_{=m} + \bar{AG} \times (\bar{\omega} \times \underbrace{\int \bar{s}\, dm}_{=0}) + \underbrace{\int \bar{s}\, dm}_{=0} \times \bar{v}_G + \underbrace{\int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\, dm}_{\text{det av } \bar{H}_G} =$

$= \bar{H}_G + \bar{AG} \times m\bar{v}_G$ VSV!

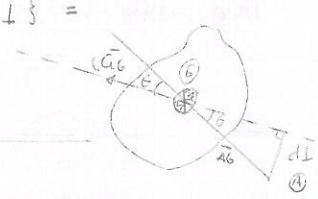
Teoriuppgift 12: Visa den "plana momentlagen" för godt punkt utgående från E2

Påstående: $\Sigma \bar{M}_A = I_G \bar{\alpha} \pm m\bar{a}_G d_\perp$

Bevis: $\Sigma \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G = \{$ Förflyttningssats $\} \Rightarrow \Sigma \bar{M}_A = \Sigma \bar{M}_G + \bar{AG} \times \Sigma \bar{F} = \{ \Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a}_G$

& $\Sigma \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G \} = \dot{\bar{H}}_G + \bar{AG} \times m\bar{a}_G = \{ |\bar{AG} \times \bar{a}_G| = |\bar{AG}||\bar{a}_G| \sin\theta = |\bar{a}_G|\, d_\perp \} =$

$= \dot{\bar{H}}_G \pm m\bar{a}_G d_\perp = \{ \dot{\bar{H}}_G = I_G \bar{\alpha} \} = I_G \bar{\alpha} \pm m \cdot \bar{a}_G d_\perp$ VSV



Fö 6: Räkneföreläsning 2; 6/83, 6/84, 6/104, B40

Vid förlopp där $t = 0^+$ kan θ & $\dot{\theta} = \omega$ antas vara lika med 0

Fö 7: Plan kinetik, styrande

Def: $\Sigma \bar{M}_O = I_O \cdot \alpha$

Styrande differentialekvationer: $\Sigma \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O$ ger differentialekvation & kinematiska samband/tvång löser obekanta

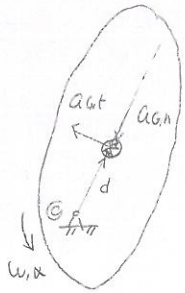
---

Teoriuppgift 13: Visa utgående från momentlagen med avseende på godtycklig punkt att $\Sigma M_O = I_O \alpha$ där O är fix i kropp & rum

"$\Sigma M_A = I_G \alpha \pm m \cdot a_G d_\perp$" ger här $\Sigma M_O = I_G \alpha + m \cdot a_{G,t} d_\perp + m\, a_{G,n} \cdot 0 = \{$ karusellekvation

ger $a_{G,t} = \alpha d \} = I_G \alpha + md^2\alpha = (I_G + md^2)\alpha = \{$ Steiners sats ger $I_O = I_G + md^2 \}$

$= I_O \alpha \Leftrightarrow \Sigma M_O = I_O \alpha$ VSV!



Fö 8: Arbete, energi & effekt

Lagen om kinetiska energin

$$U_{tot} = \int_{①}^{②} \bar{F} \cdot dr + \int_{①}^{②} G\, d\theta = \int_{①}^{②} m\bar{v}_G + d\bar{v}_G + \int_{①}^{②} I_G \omega\, d\omega$$

eller ekvivalent $U_{tot} = \Delta T$ där T ges av

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Def Effekten av arbete sägs vara $P = \frac{dU}{dt}$

- En krafts effekt ges $P_F = \bar{F} \cdot \bar{v}$
- Ett kraftpars effekt ges $P_G = G\omega = \bar{G} \cdot \bar{\omega}$

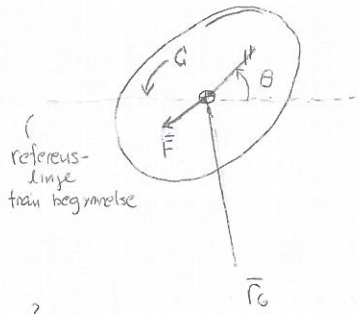
Energibalans En stelkropp som rör sig under konservativa krafters verkan (fjäder- & tyngdkraft) påverkas av ett "arbete" som ges

$U_{tot} = U_g + U_e + U'$ där $U_{tot} = \Delta T$, $U_g = -\Delta V_g$, $U_e = -\Delta V_E$ & U' är övriga krafters påverkan!

$$\therefore\ U_{tot} = U_g + U_e + U' \iff U' = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_E$$

Teoriuppg. lt 14: Visa att $U_{tot} = \Delta T$ utgående från rörelselagar (Euler I & II)

Rörelselagarna ger respektive



$$\Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a}_G \iff \bar{F} = m\ddot{\bar{r}}_G \iff (\bar{F} - m\ddot{\bar{r}}_G) \cdot d\bar{r}_G = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \bar{M} = I_G \alpha \iff G = I_G \ddot{\theta} \iff (G - I_G\ddot{\theta})\, d\theta = 0 \quad (2)$$

(1) + (2) ger $(\bar{F} - m\ddot{\bar{r}}_G) \cdot d\bar{r}_G + (G - I_G\ddot{\theta})\, d\theta = 0 \iff$

$$\iff \left\{ \ddot{\bar{r}}_G \cdot d\bar{r}_G = a_G \cdot d\bar{r}_G = \frac{d\bar{v}_G}{dt} \cdot d\bar{r}_G = d\bar{v}_G \cdot \bar{v}_G \ \ \& \ \ \ddot{\theta}\, d\theta = \omega\, d\omega \right\}$$

$$\iff \bar{F} \cdot d\bar{r}_G - m\, d\bar{v}_G \cdot \bar{v}_G + G\, d\theta - I_G \omega\, d\omega = 0 \iff$$

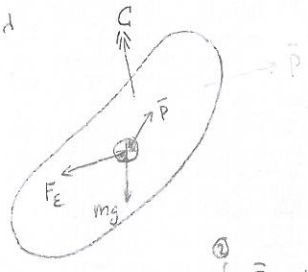
$$\iff \int_{①}^{②} \bar{F} \cdot d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} G\, d\theta = \int_{①}^{②} m\bar{v}_G \cdot d\bar{v}_G + \int_{①}^{②} I_G \omega\, d\omega =$$

VL är totalt uträttat arbete av krafter & kraftparsmoment

$$HL = \left[m\tfrac{1}{2} \bar{v}_G \cdot \bar{v}_G \right]_{①}^{②} + \left[\tfrac{1}{2} I_G \omega^2 \right]_{①}^{②} = \frac{m v_{G_2}^2}{2} + \frac{I_G \omega_2^2}{2} - \left(\frac{m v_{G_1}^2}{2} + \frac{I_G \omega_1^2}{2} \right) = T_2 - T_1 = \Delta T \quad \text{VSV!}$$

Teoriuppgift 15: För in potentialerna V_G & V_E för konservativa krafter i lagen om kinetiska energin & visa att man då får Energiekvationen
$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_E$

Frilagd kropp



Lagen om kinetiska energin ger $U_{tot} = T_2 - T_1$

$$U_{tot} = \int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} \bar{C}\, d\theta$$

Med $\bar{F} \circ d\bar{r}_G = (\bar{F}_E + m\bar{g} + \bar{P}) \circ dr_G$

$$\int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r}_G = \int_{①}^{②} \bar{F}_E \circ d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} m\bar{g} \circ d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} \bar{P} \circ d\bar{r}_G$$

$\therefore$ $U_{tot} = U_g + U_E + U'$ där $U' = \int_{①}^{②} \bar{P} \circ d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} \bar{C}\, d\theta$ är "övriga krafters påverkan"

- $U_g = \int_{①}^{②} m\bar{g} \circ d\bar{r}_G = \{$konservativ så ej vägberoende, inför $xyz\} = \int_{①}^{②} m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \{$ ② = "h_2", ① = "h_1" $\} =$
$= \int_{h_1}^{h_2} -mg\, dx = -mg(h_2 - h_1) = \{V_G = mgh\} = -(V_{g_2} - V_{g_1}) = -\Delta V_g$
- $U_E = \int_{①}^{②} \bar{F}_E \circ d\bar{r}_G = \{$konservativ så ej vägberoende, $\bar{F}_E = k\bar{r}$, $\bar{r}$ = elongation av fjäder$\} =$
$= \int_{①}^{②} k\bar{r} \circ d\bar{r}_G = \{$ ② = "δ_2", ① = "δ_1", $\delta_1, \delta_2 \in \bar{r}\} = -\left[\frac{kr^2}{2}\right]_{\delta_1}^{\delta_2} = -\left(\frac{k\delta_2^2}{2} - \frac{k\delta_1^2}{2}\right) =$
$-(V_{E_2} - V_{E_1}) = -\Delta V_E$

kraften verkar motsatt $\bar{r}$:s riktning

$\therefore$ Sammanfattningsvis:

$$U_{tot} = \int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} \bar{C}\, d\theta = \{\text{inför tyngdskrafts- \& fjäderkraftsverkan}\} =$$

$$= \underbrace{\int_{①}^{②} \bar{P} \circ d\bar{r}_G + \int_{①}^{②} \bar{C}\, d\theta}_{= U'} + \underbrace{\int_{①}^{②} \bar{F}_E \circ d\bar{r}_G}_{= U_E = -\Delta V_E} + \underbrace{\int_{①}^{②} m\bar{g} \circ d\bar{r}_G}_{= U_g = -\Delta V_g} = U' - \Delta V_E - \Delta V_g$$

$\therefore$ $U_{tot} = U' + U_E + U_g \iff U' = \Delta T + \Delta V_E + \Delta V_g$ VSV!

Teoriuppgift 16: En stel kropp rör sig med $\bar{\omega}$ under verkan av $\bar{C}$. Visa att $P = \bar{C} \circ \bar{\omega}$

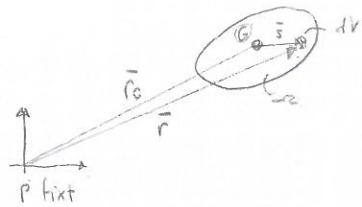
$P_M = \{\bar{M}_i = \bar{r}_{d/c} \times \bar{F}\} = \bar{F} \circ \bar{v}_d + (-\bar{F} \circ \bar{v}_c) = \bar{F} \circ (\bar{v}_d - \bar{v}_c) = \{\bar{v}_d = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}_{d/c}\} =$

$= \bar{F} \circ (\bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}_{d/c} - \bar{v}_c) = \bar{F} \circ (\bar{\omega} \times \bar{r}_{d/c}) = \bar{\omega} \circ (\bar{r}_{d/c} \times \bar{F}) = \{\bar{M}_i = \bar{r}_{d/c} \times \bar{F}\} = \bar{\omega} \circ \bar{M}_i$ V.S.V

I första steget bryts momentet M_i ut mot två motriktade lika stora krafter med angreppspunkterna c & d.

Teoriuppgift 17: Visa i 2D att följande definitioner av T är ekvivalenta för en stelkropp

Rörelseenergin $T \underset{def}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega |\dot{\bar{r}}|^2 \rho\, dV = \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 \rho\, dV =$



$= \frac{1}{2}\int_\Omega (\dot{\bar{r}} \circ \dot{\bar{r}})\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_\Omega ((\bar{r}_G + \bar{s})^\cdot \cdot (\bar{r}_G + \bar{s})^\cdot)\rho\, dV =$

$= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\dot{\bar{r}}_G|^2 + |\dot{\bar{s}}|^2 + 2\dot{\bar{r}}_G \cdot \dot{\bar{s}})\rho\, dV = \{\bar{s}$ fix vektor i

kroppen $\Rightarrow \dot{\bar{s}} = \bar{\omega} \times \bar{s}\} = \frac{1}{2}\int_\Omega (v_G^2 + |\bar{\omega} \times \bar{s}|^2 + 2\bar{v}_G \cdot \dot{\bar{s}})\rho\, dV =$

$= \frac{1}{2}\int_\Omega v_G^2 \rho\, dV + \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{\omega} \cdot (\bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s}))\rho\, dV + \bar{v}_G \cdot \int_\Omega \dot{\bar{s}}\rho\, dV =$

$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \int_\Omega \bar{s} \times (\bar{\omega} \times \bar{s})\rho\, dV + \bar{v}_G \cdot \underbrace{\left(\int_\Omega \bar{s}\rho\, dV\right)^\cdot}_{=0} =$

$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}_G = \{\bar{H}_G = I_G \bar{\omega}\} =$

$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$ i 2D VSV.

Föreläsning 9: Impulslagarna

Impulslagarna i 2D: Utgår från rörelseekvationerna

Impuls $:= L = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt = \bar{G}(t_2) - \bar{G}(t_1)$ (Från E1)

Impulsmoment $:= A = \int_{t_1}^{t_2} \bar{M}_*\, dt = H_*(t_2) - H_*(t_1)$ (Från E2)

där $*$ = fix punkt, kroppsfix punkt eller masscentrum.

6 egenskaper hos stötar

1: "stöttiden $\to 0$" $\Rightarrow$ Alla hastighetsförändringar är momentana
2: Om rörelsetillstånd vid t_1 givet $\Rightarrow$ Impulslagar ger tillstånd vid t_2
3: Bara "impulsiva" krafter ger en impuls i integral
4: Momentan stöt $\Rightarrow$ kroppens läge oförändrat precis förefter stöt
5: Fullständigt plastisk stöt, då kropparna fäster i varandra, ger $e = 0$ $\Rightarrow$ Energiförlust
Elastisk stöt $\Rightarrow$ $e = 1$ $\Rightarrow$ Ingen energiförlust
6: Om flera kroppar rör sig, teckna ekvation för systemet

Teoriuppgift 8: Visa, utgående från förflyttningssatsen för rörelsemängdsmomentet i plana fallet $H_A = I_G\omega \pm m v_G d\perp$, att rörelsemängdsmomentet kan tecknas $H_O = I_O\omega$ om O är kropps- & rumsfix.

$H_A = I_G\omega \pm m v_G d\perp = \{$ O är kroppsfix så $v_G = \omega r_{G/O}$, $d\perp = r_{G/O} \} = I_G\omega + m r_{G/O}\omega r_{G/O} =$

$= (I_G + m r_{G/O}^2)\omega$, vi inför $I_O = I_G + m r_{G/O}^2$ så $H_O = I_O\omega$ V.S.V

Teoriuppgift 18: Visa utgående från momentlagen $\Sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G$ att EL kan skrivas $\Sum \bar{M}_p = \dot{\bar{H}}_p$ där p är en fix punkt i rummet.

Påstående $\Sum \bar{M}_p = \dot{\bar{H}}_p$: bevis:

$\Sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G$ ger i VL: $\Sum \bar{M}_G \underset{\text{förfl.regel}}{=} \{ \Sum \bar{M}_p = \Sum \bar{M}_G + \bar{\rho}_G \times \Sum \bar{F} \} = \Sum \bar{M}_p - \bar{\rho}_G \times \Sum \bar{F}$

HL ger $\dot{\bar{H}}_G \underset{\text{förfl.regel}}{=} \{ \bar{H}_p = \bar{H}_G + \bar{\rho}_G \times m\bar{v}_G \} \Leftrightarrow \bar{H}_G = \bar{H}_p - \bar{\rho}_G \times m\bar{v}_G \Rightarrow \dot{\bar{H}}_G = \dot{\bar{H}}_p - \dot{\bar{\rho}}_G \times m\bar{v}_G - \bar{\rho}_G \times m\bar{a}_G =$

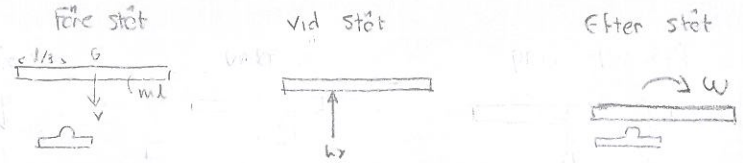
$= \dot{\bar{H}}_p - \bar{v}_G \times m\bar{v}_G - \bar{\rho}_G \times \Sum \bar{F} = \dot{\bar{H}}_p - \bar{\rho}_G \times \Sum \bar{F}$ ccc $\Sum \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G \Leftrightarrow \Sum \bar{M}_p - \bar{\rho}_G \times \Sum \bar{F} = \dot{\bar{H}}_p - \bar{\rho}_G \times \Sum \bar{F}$

$\Rightarrow \Sum \bar{M}_p = \dot{\bar{H}}_p$ VSV!

Teoriuppgift 19: Förklara varför impulsen av en konstant ändlig kraft blir noll vid en momentan stöt. Ge exempel på ett fall där impulsen inte blir noll vid momentan stöt!

Kraft definieras i kraftlagen som förändring i rörelsemängd $\Sum \bar{F} = \frac{d m v_G}{dt}$

Impuls är integralen av kraftlagen & då vi antar att att alla stötar är momentana, dvs integreringsintervallet $t_2 - t_1 \to 0$ kommer "konstanta ändliga krafter" inte ge någon impuls. En kraft som verkar under mycket kort tid ger dock en impuls. Exempel på det är stötkrafter. Ex:



Föreläsning 10: 3D-kinematik

En kropps absoluta vinkelhastighet

Ett system av delkroppar 1, 2, 3 sitter fast i marken 0. Då gäller att

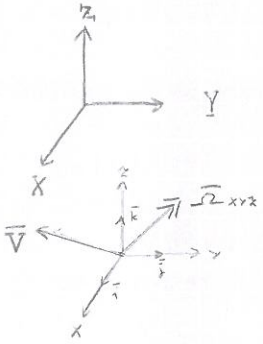
$$\bar{\omega}_{3/0} = \bar{\omega}_{3/2} + \bar{\omega}_{2/1} + \bar{\omega}_{1/0}$$

Inför metod: "Den absoluta vinkelhastigheten (mätt relativt "backen") representerad i ett roterande koordinatsystem

Coriolis ekvation

$$\dot{\bar{V}} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{/fixt} = \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{/xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{V}$$

Teoriuppgift 20: Ett koordinatsystem med $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ roterar med hastigheten $\bar{\Omega}$. Härled Coriolis ekvation i 3D ur sambanden $\dot{\bar{i}} = \bar{\Omega} \times \bar{i}$ etc.



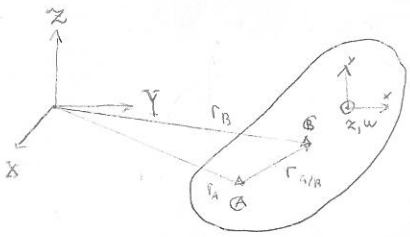
xyz roterar med $\bar{\Omega}_{xyz}$ givet XYZ-system. $\bar{V} = (V_x, V_y, V_z)$ är en godtycklig vektor.

$$\dot{\bar{V}} = \dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k} + V_x \dot{\bar{i}} + V_y \dot{\bar{j}} + V_z \dot{\bar{k}} =$$

$$= \left\{ \dot{\bar{i}} = \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{i},\ \dot{\bar{j}} = \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{j},\ \dot{\bar{k}} = \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{k} \right\} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{V}_x & \dot{V}_y & \dot{V}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}}_{\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{/xyz}} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{V} = \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{V} \qquad \text{VSV!}$$

Teoriuppgift 24: Visa hastighetssambandet för två kroppstagna punkter A & B hos en stel kropp $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$ via Coriolis ekvation



$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{A/B} \Rightarrow \{\text{derivering}\}\ \dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{A/B} =$$

$$\Rightarrow \left\{ \dot{\bar{r}}_B = \bar{V}_B,\ \dot{\bar{r}}_A = \bar{V}_A \right\} \Rightarrow \bar{V}_B = \bar{V}_A + \dot{\bar{r}}_{A/B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \dot{\bar{r}}_{A/B} = \left(\frac{d\bar{r}_{A/B}}{dt}\right)_{XYZ} = \underbrace{\left(\frac{d\bar{r}_{A/B}}{dt}\right)_{/xyz}}_{=0} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{r}_{A/B} \right\}$$

$$\Rightarrow \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{r}_{A/B}$$

Vi byter beteckningar $\bar{\Omega}_{xyz} := \bar{\omega}$, $\bar{r}_{A/B} = \bar{AB}$

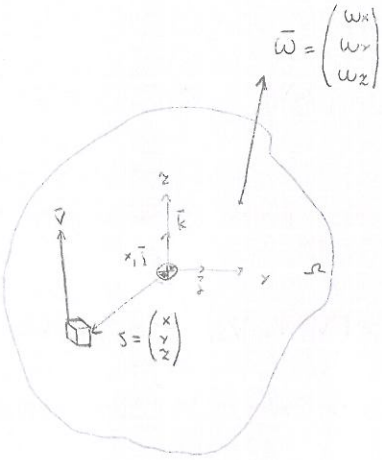
$$\therefore \quad \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB} \qquad \text{VSV!}$$

Föreläsning 11: Räkneföreläsning 3

Val av koordinatsystem görs med målsättning att

- Någon kropps $\bar{\omega}$ blir konstant eller om det inte går
- Så att man kan hitta ett samband mellan vinkelhastigheter

Föreläsning 12: 3D-kinetik



M.a.p G, en stelkropp i plan rörelse i dvs. $\bar{s}, \bar{v} \in \Omega$ är $\bar{H}_G$ alltid $\perp \Omega$

Def: Rörelsemängdsmoment m.a.p godtycklig punkt är

$\bar{H}_A = \int \bar{r} \times \bar{v}\, dm$, med avseende på G fås

$\bar{H}_G = \int \bar{s} \times \bar{v}\, dm$ ger komponentvis

$$H_{G,x} = \omega_x \cdot \int (y^2+z^2)\,dm - \omega_y \cdot \int xz\,dm - \omega_z \cdot \int yx\,dm$$

$$H_{G,y} = +\omega_x \cdot \int yz\,dm + \omega_y \int (x^2+z^2)\,dm - \omega_z \int xy\,dm$$

$$H_{G,z} = -\omega_x \cdot \int yz\,dm - \omega_y \int xz\,dm + \omega_z \int (x^2+y^2)\,dm$$

$$\bar{H}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Def Vi kallar I_{xy}, I_{zy} & I_{xz} för tröghetsprodukter.
Vid symmetrisk kring axlar blir tröghetsprodukter $=0$ enligt:

Vid symmetri kring:
$$\begin{cases} x \Rightarrow I_{xy} = I_{zx} = 0 \\ y \Rightarrow I_{xy} = I_{zy} = 0 \\ z \Rightarrow I_{zx} = I_{zy} = 0 \end{cases}$$

Steiners sats: Förflyttningssatsen ger

$$\bar{I}_A = I_G + m \begin{pmatrix} d_z^2 + d_y^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix}$$

Momentlagen i rörligt koordinatsystem:

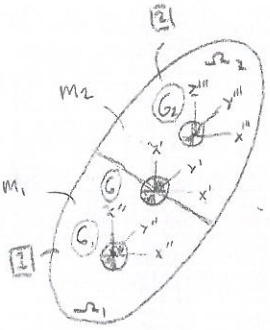
$$\sum \bar{M} = \underset{\substack{\text{m.a.p} \\ G \& O}}{\dot{\bar{H}}} = \left(\frac{d \bar{I} \bar{\omega}}{dt} \right)_{/xyz} + \bar{\Omega}_{xyz} \times \bar{H}$$

Välj xyz sådant att $\bar{I}$ är konstant så att $\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{0}$

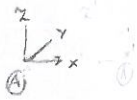
Viktigt i 3D-kinematik

I allmänhet gäller $\sum \bar{M} \neq \bar{I}\bar{\omega} \Rightarrow$ Derivera $\bar{H}$

Teoriuppgift 23 Bevisa att massträgheetsprodukter & massträgheetsmoment kan adderas om de är beräknade på samma punkt & riktning.



Homogen sammansatt kropp



För hel kropp: $I_{A,zz} = \int_{\Omega_1+\Omega_2} \left((x'-dx)^2 + (y'-dy)^2 \right) dm =$

$$= \underbrace{\int_{\Omega_1+\Omega_2} (x'^2 + y'^2)\, dm}_{I_{G,zz}} - 2\,dx \int_{\Omega_1+\Omega_2} x'\, dm - 2\,dy \int_{\Omega_1+\Omega_2} y'\, dm + (dx^2+dy^2) \underbrace{\int_{\Omega_1+\Omega_2} 1 \cdot dm}_{m}$$

Delkropp 1 : $I_{A,zz_1} = \int_{\Omega_1} \left((x''-dx)^2 + (y''-dy)^2 \right) dm =$

$$= \int_{\Omega_1} (x''^2 + y''^2)\, dm - 2\,dx \int_{\Omega_1} x''\, dm - 2\,dy \int_{\Omega_1} y''\, dm + (dx^2+dy^2) \int_{\Omega_1} 1 \cdot dm$$

Delkropp 2 : $I_{A,zz_2} = \int_{\Omega_2} \left((x'''-dx)^2 + (y'''-dy)^2 \right) dm =$

$$= \int_{\Omega_2} (x'''^2 + y'''^2)\, dm - 2\,dx \int_{\Omega_2} x'''\, dm - 2\,dy \int_{\Omega_2} y'''\, dm + (dx^2+dy^2) \int_{\Omega_2} 1 \cdot dm$$

$$\therefore \quad I_{A,zz_1} + I_{A,zz_2} = \int_{\Omega_1} (x''^2 + y''^2)\, dm + \int_{\Omega_2} (x'''^2 + y'''^2)\, dm + (dx^2+dy^2) \underbrace{\left(\int_{\Omega_1} 1 \cdot dm + \int_{\Omega_2} 1 \cdot dm \right)}_{M = m_1 + m_2} =$$

$$\begin{cases} r^2 = x'^2 + y'^2 \\ r_1^2 = x''^2 + y''^2 \\ r_2^2 = x'''^2 + y'''^2 \end{cases}$$

det gäller att $r^2 = \frac{1}{M} \left(\int_{\Omega_1} r_1^2\, dm + \int_{\Omega_2} r_2^2\, dm \right)$ (masscentrum för sammansatt kropp)

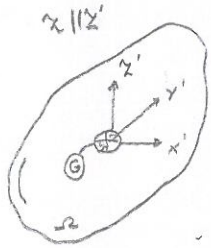
$$\Leftrightarrow \quad M r^2 = \int_{\Omega_1} r_1^2\, dm + \int_{\Omega_2} r_2^2\, dm \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\int_{\Omega_1+\Omega_2} r^2\, dm}_{I_{G,zz}} = \underbrace{\int_{\Omega_1} r_1^2\, dm}_{I_{G,zz_1}} + \underbrace{\int_{\Omega_2} r_2^2\, dm}_{I_{G,zz_2}}$$

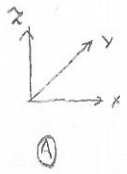
$$\therefore \quad I_{A,zz_1} + I_{A,zz_2} = I_{G,zz_1} + I_{G,zz_2} + (dx^2+dy^2)(m_1+m_2) =$$

$$= \{ I_{G,zz} = I_{G,zz_1} + I_{G,zz_2}, \quad m = m_1 + m_2 \} = I_{G,zz} + m(dx^2+dy^2)$$

Teoriuppg. ft 21 Visa Steiners sats för ett element I_{zz} i massröghetsmatrisen.
Dvs $I_{A,zz} = I_{G,zz} + M(dx^2+dy^2)$

$x \parallel x'$
$y \parallel y'$
$z \parallel z'$





$\bar{GA} = (dx \;\; dy \;\; dz)$
$x = x' - dx$
$y = y' - dy$
$z = z' - dz$

$$\text{def} \Rightarrow \quad I_{A,zz} = \int_\Omega (x^2+y^2)\,dm = \int_\Omega \left[(x'-dx)^2 + (y'-dy)^2\right] dm =$$

$= \{$utvecklar produkter & skriver som summa av integraler$\} =$

$$= \int_\Omega (y'^2 + x'^2)\,dm - 2dx\int_\Omega x'\,dm - 2dy\int_\Omega y'\,dm + (dx^2+dy^2)\int_\Omega 1\cdot dm =$$

$= \{ \int_\Omega x'\,dm = 0$ & $\int_\Omega y'\,dm = 0$ enligt $\int_\Omega s\,dm = 0$ & $\int_\Omega (y'^2+x'^2)\,dm = I_{G,zz} + M(dx^2+dy^2)$

VSV!

Teoriuppg. ft 22 Visa Steiners sats för I_{xy}, dvs $I_{A,xy} = I_{G,xy} + M\,dx\,dy$
$\bar{GA} = (dx, dy, dz)$. Varför går det lika bra med $\bar{AG}$?

Med samma referenssystem & figur som ovan fås:

$$\text{def} \Rightarrow \quad I_{A,xy} = \int_\Omega xy\,dm = \int_\Omega (x'-dx)(y'-dy)\,dm = \int_\Omega (x'y' - x'dy - y'dx + dxdy)\,dm =$$

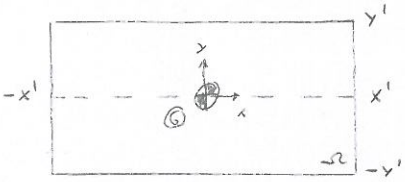
$$= \int_\Omega x'y'\,dm - dy\underbrace{\int_\Omega x'\,dm}_{=0} - dx\underbrace{\int_\Omega y'\,dm}_{=0} + dxdy\underbrace{\int_\Omega 1\,dm}_{=M} = \{ \int_\Omega x'y'\,dm = I_{G,xy} \} =$$

$= I_{G,xy} + M\,dx\,dy$ VSV!

$\bar{AG} = (-dx, -dy, -dz)$. Pga blandtermer $= 0$ $(\int_\Omega s\,dm = 0)$ kommer bara termen $(-dx)(-dy) = dxdy$ ge en term. Då båda termerna antingen är negativa eller positiva spelar det ingen roll vilken riktning vektorn har

---

Teoriuppgift 25 För plan, tunn, symmetrisk kropp gäller att $I_{G,xy} = 0$. Förklara varför utgående från $I_{G,xy} = \int_\Omega xy\,dm$



det $\Rightarrow$ $I_{G,xy} = \int_\Omega xy\,dm = \{ dm = dx\,dy \cdot \rho \} \underset{\text{homogen}}{=} \rho \int_{-x'}^{x'} x\,dx \cdot \int_{-y'}^{y'} y\,dy$

$$= \rho \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-x'}^{x'} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=-y'}^{y'} =$$

$$= \rho \underbrace{\left(\frac{x'^2 - x'^2}{2} \right)}_{=0} \underbrace{\left(\frac{y'^2 - y'^2}{2} \right)}_{=0} = 0$$

Pa grund av symmetri fås integrationsintervall som gor att produkten blir 0

Föreläsning 13: Räkneföreläsning 4 ; 3D-kinematik: 16*, 17*

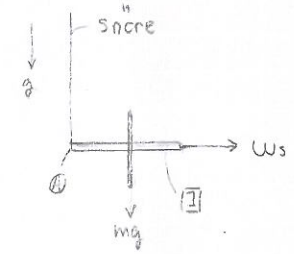
- Momentlagen ger differentialekvation
- Beräkning av tröghetsprodukter

Föreläsning 14: Gyro

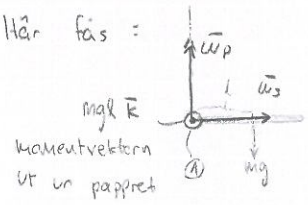
Def: En kropp sägas vara rotationssymmetrisk om om det på något sätt går att dra en axel genom föremålet & det förblir oförändrat om den roteras runt denna axel

Gyrodynamik studerar mekanismer med en snabbt spinnande kropp som är fri att rotera kring minst en axel vinkelrät mot spinnaxeln. De studeras med kraftlagarna

Precession En skiva som hålls i ett snöre sätts i spinn med ω_s (spinnvinkelhastighet). Det som då händer är att kropp $\boxed{I}$ kommer att börja rotera kring snöret. Denna rörelse kallas precession.



Här fås :



Processionsriktningen är alltid riktad så att momentvektorn från kroppen, $\bar{\omega}_s$ & $\bar{\omega}_p$ utgör ett högersystem enligt

$$\bar{M}_A = \bar{\omega}_p \times I_A \bar{\omega}_s$$

OBS! Om kroppen är rotationssymmetrisk väljs xyz så att $\bar{\Omega}_{xyz} = \bar{\omega}_p$