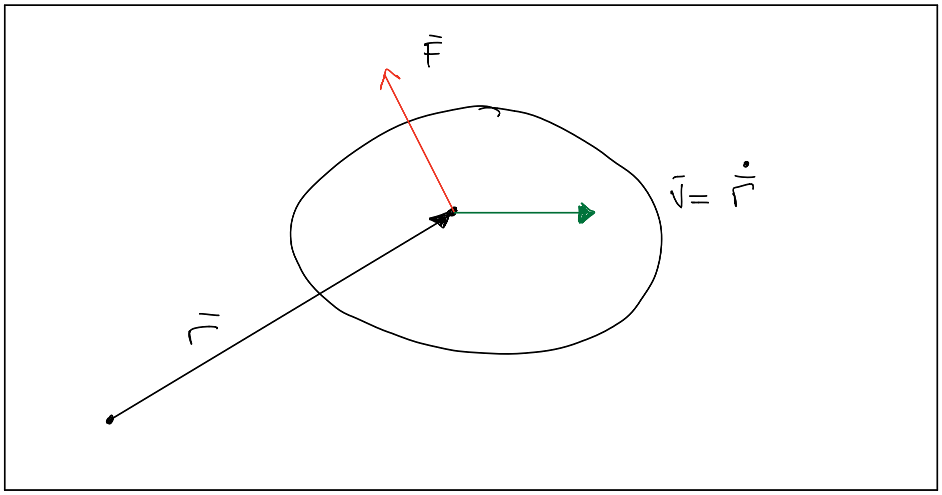
Föreläsning 9

TMME04 – Mekanik II

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

Effekt och arbete, av en kraft



i-ram

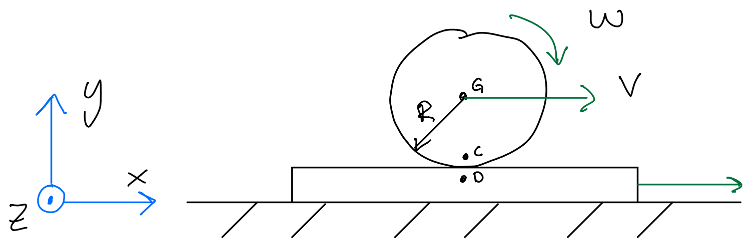
Def:

Kraftens effekt P och arbete U uträttat under $t_1 \leq t \leq t_2$, i en i-ram, är

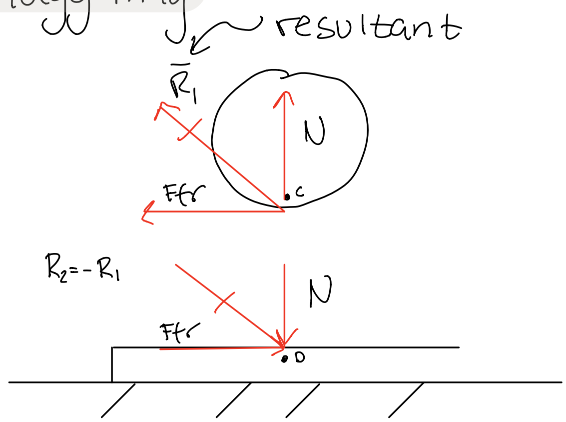
$$\boxed{P = \bar{F} \cdot \bar{v}}$$

$$\boxed{U = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} \cdot \bar{v} \, dt}$$

Ex: Rullande hjul



Friläggning:



$$\bar{V}_C = \bar{V}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_{GC} = (V - R\omega)\hat{x}$$

$$\bar{V}_D = u\hat{x}$$

Effekt av kontaktkraft, på hjulet

$$P_1 = \bar{R}_1 \cdot \bar{V}_C = (-F_{fr}\hat{x} + N\hat{y}) \cdot (V - R\omega)\hat{x} =$$
$$= -F_{fr}(V - R\omega)$$

Effekt av kontaktkraft, på plankan

$$P_2 = \bar{R}_2 \cdot \bar{V}_D = F_{fr} \cdot u$$

Ingen glidning

$$\bar{V}_C = \bar{V}_D \Rightarrow V - R\omega = u$$

$\because \; P_1 + P_2 = 0$

Ingen glidning, fix planka

$$\bar{V}_C = \bar{V}_D = 0$$

$\because \; P_1 = P_2 = 0.$

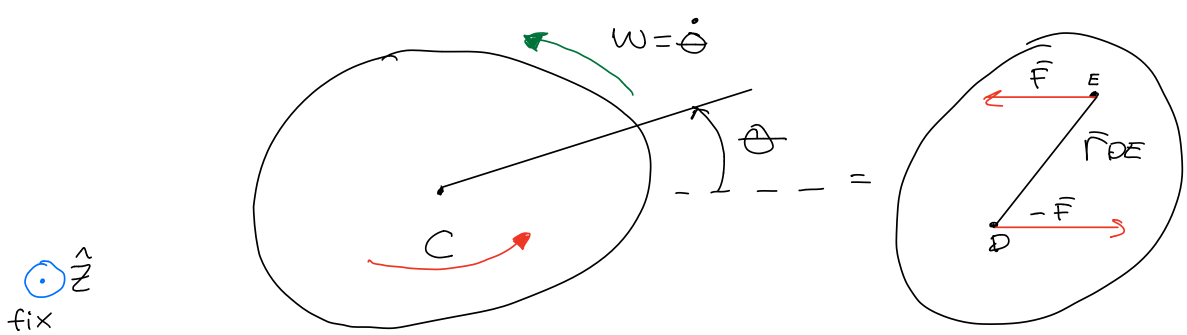
$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow U = \int \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt$$

$$\boxed{U = \int \bar{F} \cdot d\bar{r}},$$

Lämpligt att använda då F angriper i en och samma kroppsfixa punkt.

Effekt och arbete, av kraftparsmoment

Bara i plana problem.



$C = C\hat{z}$

$\bar{C} = \bar{r}_{DE} \times \bar{F}$

SATS:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= C\omega \\ U &= \int C\, d\theta \end{aligned}}$$

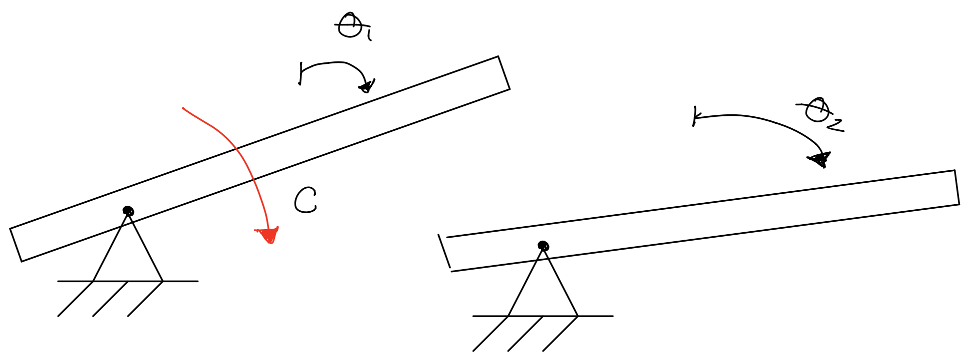
Bevis:

$$P = \bar{F}\cdot\bar{v}_E + (-\bar{F})\cdot\bar{v}_D = \bar{F}\cdot(\bar{v}_E - \bar{v}_D) = \bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_{DE}) =$$

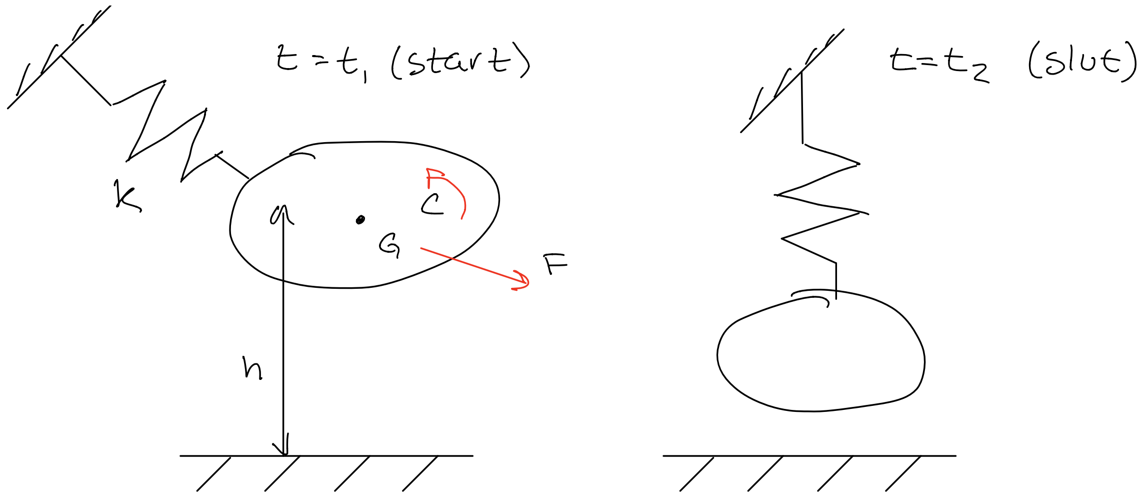
$$= \bar{\omega}\cdot(\bar{r}_{DE}\times\bar{F}) = \bar{\omega}\cdot\bar{C} = C\omega$$

$$U = \int C\omega\, dt = \Big/\ \omega = \frac{d\theta}{dt}\ \Big/ = \int C\, d\theta$$

Ex:



C konst $\Rightarrow$ $U = C(\theta_2 - \theta_1)$



SATS: Arbete-energilagen, i en i-ram

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$\Delta T = T_2 - T_1$ ändring i rörelseenergi T

$\Delta V_g = V_{g_2} - V_{g_1}$ ändring i lägesenergi $V_g = mgh$

$\Delta V_e = V_{e_2} - V_{e_1}$ ändring i fjäderenergi $V_e = \frac{k}{2}\delta^2$,

δ förlängning

U arbetet av alla laster utom tyngd- och fjäderkrafter.

BEVIS:

Se kompendiet.

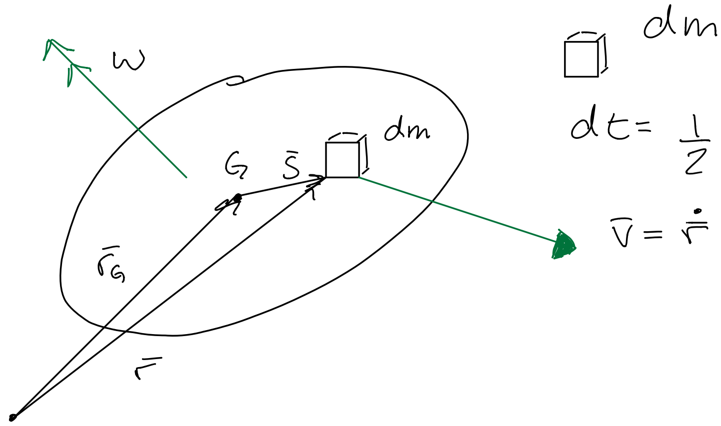
Följer ur Euler I & II.

Beräkning av T

Partikel:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Stel kropp



dm,

$$dt = \frac{1}{2} dm\, v^2$$

Def:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \int v^2 \, dm}$$

SATS: Königs sats

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{h}_G}$$

Bevis:

$$\bar{h}_G = \int \bar{s} \times \dot{\bar{r}}\,dm$$

$$T = \frac{1}{2}\int \bar{r} \cdot \bar{r}\,dm = \frac{1}{2}\int (\dot{\bar{r}}_G + \dot{\bar{s}}) \cdot \dot{\bar{r}}\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int \bar{r}_G \cdot (\dot{\bar{r}}_G + \dot{\bar{s}})\,dm + \frac{1}{2}\int (\bar{\omega} \times \bar{s}) \cdot \dot{\bar{r}}\,dm =$$

($\bar{s}$ kroppsfix)

$$= \frac{1}{2} v_G^2 \underbrace{\int dm}_{m} + \frac{1}{2} v_G \cdot \underbrace{\int \dot{\bar{s}}\,dm}_{= \left(\underbrace{\int \bar{s}\,dm}_{= \bar{0}}\right)^{\cdot}} + \frac{1}{2}\int (\bar{s} \times \dot{\bar{r}}) \cdot \bar{\omega}\,dm =$$

$$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \underbrace{\int s \times \dot{\bar{r}}\,dm}_{\bar{h}_G} \quad \blacksquare$$

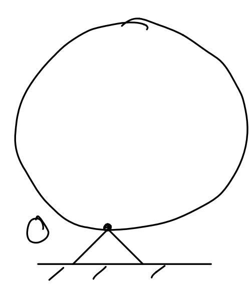
Plana problem =>

$$\bar{h}_G = I_G \bar{\omega}$$

$$\therefore \quad \boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2}$$

Rorelseenergi vid rotation kring punkt O, fix i i-ram

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{h}_O$$



Plana problem =>

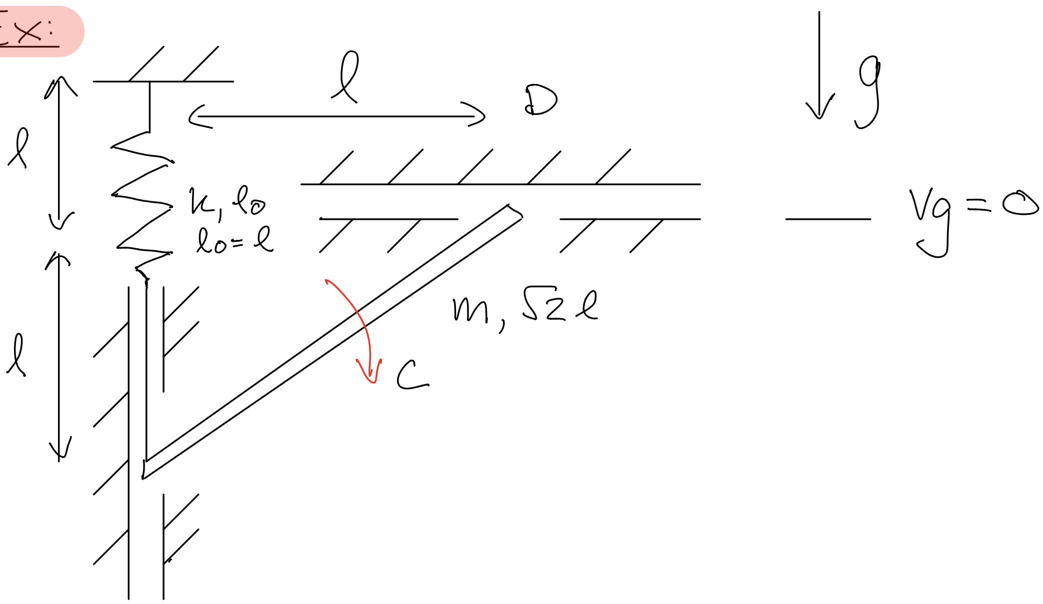
$$\bar{h}_O = I_O \bar{\omega}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$$

Även:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_M \omega^2}$$, M är momentancentrum

Ex:



Stången släpps ur vila från visade läget. Ingen friktion. Beräkna ω då stången är horisontell.

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad (1)$$

Läge 1 (startläge)

$V_{g1} = -mg\frac{l}{2}$

$V_{e1} = \frac{k}{2}(2l - l)^2$

$T_1 = 0$

Läge 2 (slutläge)

$V_{g2} = 0$

$V_{e2} = \frac{k}{2}(l - l)^2$

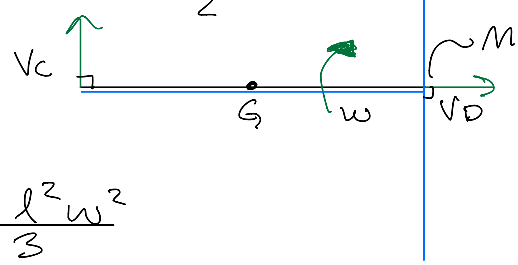
$T_2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2} \omega \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{m (\sqrt{2}\,\ell)^2}{12} \right) \omega^2 = \frac{m \ell^2 \omega^2}{3}$$

$$V_G = \frac{\sqrt{2}\,\ell\,\omega}{2}$$



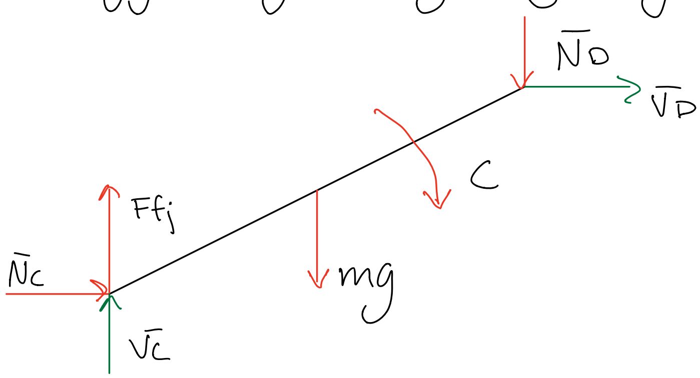
Alternativt:

Huygens sats

$$T_2 = \frac{1}{2} I_M \omega^2 = \Big/ \; I_M = \underbrace{I_G}_{\frac{m(\sqrt{2})^2}{12}} + m \left(\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2} \right)^2 = \frac{2m\ell}{3} \; \Big/ =$$

$$= \frac{m \ell^2 \omega^2}{3}$$

Frilägg stången, i godtyckligt läge



$$U = U_{N_C} + U_{N_D} + U_C$$

$\bar{N}_C \perp \bar{V}_C$ och $\bar{N}_D \perp \bar{V}_D \Rightarrow \bar{N}_C, \bar{N}_D$ ej arbetar.

$$\therefore U = U_C = + C \frac{\pi}{4}$$

rotationen

Insättning i (1) =>

$$C \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{m l^2 \omega^2}{3} + mg \frac{l}{2} - \frac{k}{2} l^2 \Rightarrow$$

$$\omega = +\sqrt{\frac{3\pi C}{4ml^2} + \frac{3k}{2m} - \frac{3g}{2l}}$$