Mattehjälpen

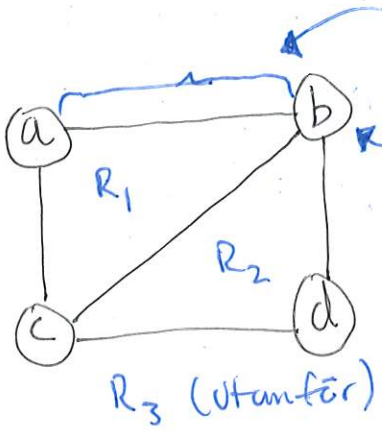
Crash Course

TATA82 Diskret matematik

VT2019 – CC #3

Grafer & grafteori

- Alltid minst en uppgift på tentan
- Terminologi:



e = edge = kant/båge

v = vertex = hörn/nod

r = region

Väg: $a \to b \to c$

Cykel: sluten väg, t.ex. $a \to b \to c \to a$

(startar och slutar på samma men i övrigt olika)

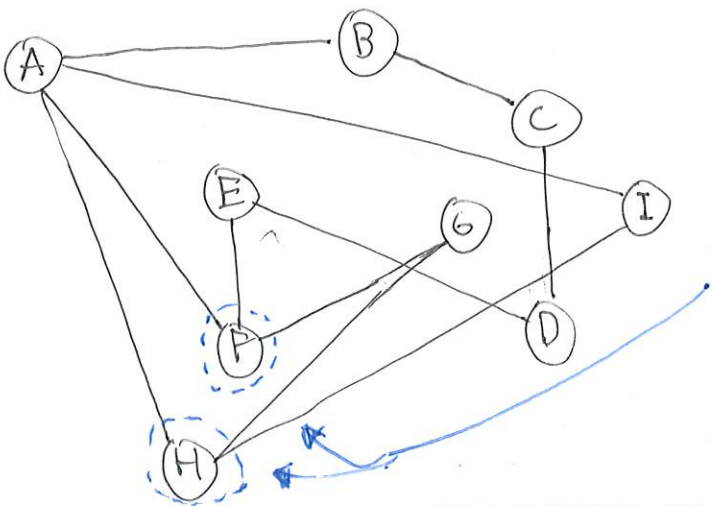
Eulergrafer

- Graf kallas Eulersk omm det finns en cykel som passerar varje kant exakt en gång.
- Alternativ 1: Hitta Eulercykel för hand
- Alternativ 2: Sats 8.3.2:

  Varje hörn i grafen har jämnt gradtal $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ Det finns en Eulercykel (dvs grafen är Eulersk).

Exempel 2014-10-23 #4: Är grafen Eulersk?



Lösning

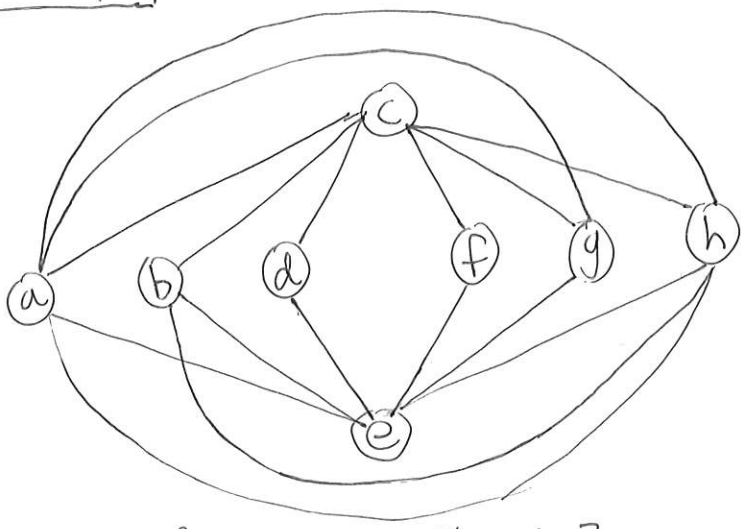
Dessa hörn har gradtal 3 (udda) $\Leftrightarrow$ grafen är ej Eulersk

Hamiltongrafer

- Graf kallas Hamiltonsk omm det finns en cykel som passerar varje hörn exakt en gång.
- Alternativ 1: Hitta Hamiltoncykel för hand
- Alternativ 2: Bevisa att det inte kan finnas Hamiltoncykel

Sats 8.4.3: Om man tar bort k st hörn och deras tillhörande kanter, och får minst k+1 sammanhängande komponenter ⇒ grafen kan ej innehålla en Hamiltoncykel.

Exempel 2015-06-04 #2

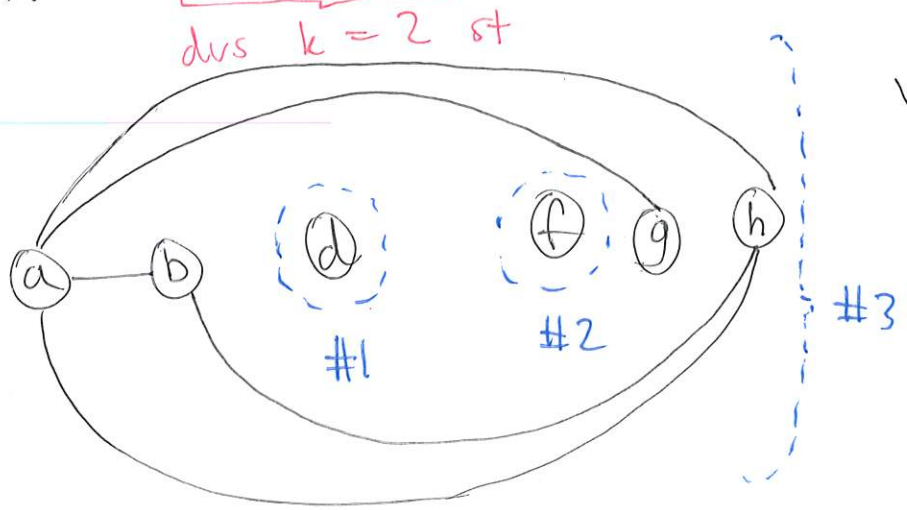


Är grafen Hamiltonsk?

Lösning

- Hörn c och e har höga gradtal ⇒ prova ta bort!

dvs k = 2 st

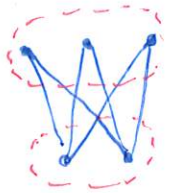


Vi får 3 st sammanhängande komponenter och k+1 = 3

⇒ grafen är ej Hamiltonsk.

Bipartita grafer

- Graf är bipartit omm den går att dela upp i två delar (s.k. bipartition) som tillsammans innehåller alla hörn men inte överlappar sinsemellan.

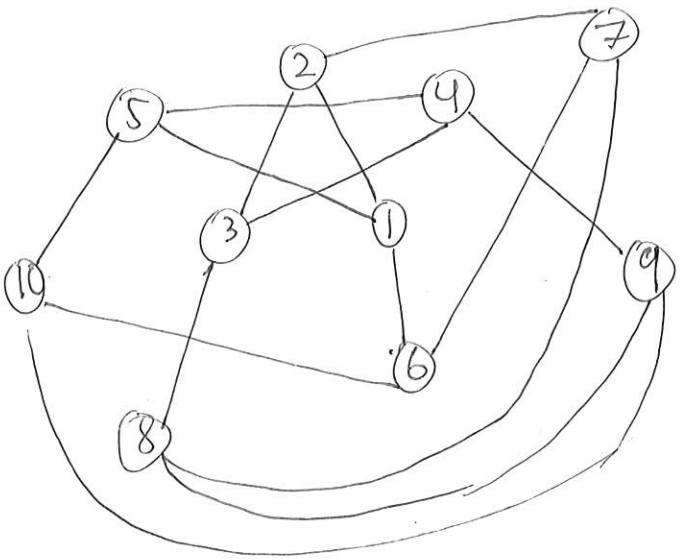


bipartitioner

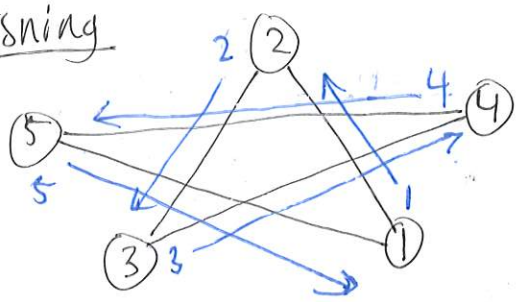
- Alternativ 1: Ta fram bipartition för hand
- Alternativ 2: Sats 8.5.5:

  Det finns inga cykler av udda längd $\Leftrightarrow$ bipartit graf

Exempel 2018-06-01 #2 Visa att grafen inte är bipartit.



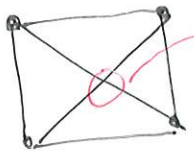
Lösning



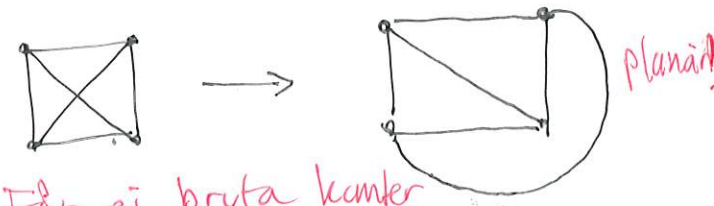
Ovan är en cykel av längd 5. Udda cykel $\Leftrightarrow$ ej bipartit.

Planära grafer

- Graf kallas planär omm den kan representeras geometriskt i planet (s.k. plan inbäddning) så att inga kanter skär varandra förutom i hörn.
- Exempel på ovanstående:



kanter skär varandra $\Rightarrow$ ej planär?



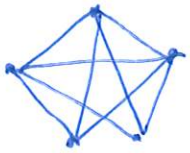
planär!

Får ej bryta kanter men OK att "lyfta"

Planära grafer, forts

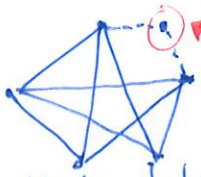
- Alternativ 1: Ta fram plan inbäddning för hand t.ex. via isomorfier / "lyfta kanter"
- Alternativ 2: Sats 10.3.3 (Kuratowskis sats)

Planär graf $\iff$ Innehåller inte K_5 eller $K_{3,3}$ eller någon underdelning av dessa.



K_5

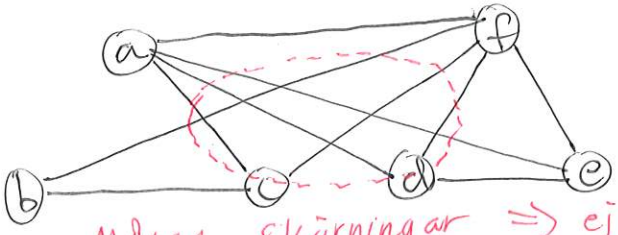
$K_{3,3}$



Underdelning av K_5

underdelning $\approx$ lägg till hörn på befintlig kant

Exempel 2014-06-04 #4

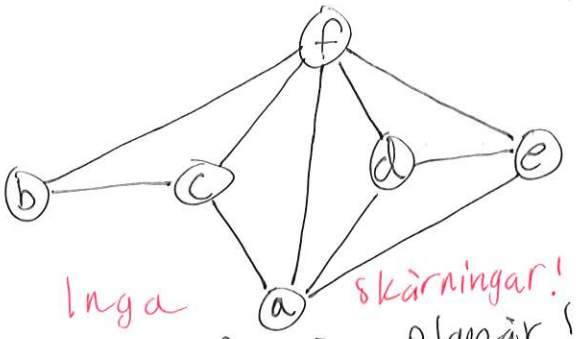


Många skärningar $\Rightarrow$ ej planär?

Är grafen planär?

flytta (a) $\longrightarrow$

Lösning



Inga skärningar!

Ja, grafen är planär!

Grafteori

- Handskakningslemmat: $\sum_v \deg(v) = 2e$

  Summan av alla hörns gradtal $= 2 \times$ antal kanter

- $\sum_r \deg(r) = 2e$

  Summan av alla $\underbrace{\text{regioners gradtal}}_{\text{antal kanter som utgör regionen}}$ $= 2 \times$ antal kanter

- Eulers formel: $v - e + r = 2$

  Antal hörn − antal kanter + antal regioner $= 2$

  OBS: Gäller endast för sammanhängande planära grafer

Exempel 2016-06-03 #2

En sammanhängande planär graf har endast hörn med gradtal 4. Ange antal regioner i grafen som en funktion av antalet kanter.

Lösning

- Sammanhängande planär graf $\Rightarrow$ Eulers formel?
  $\Rightarrow$ Handskakningslemmat?
- Hörns gradtal
- Samband mellan regioner och kanter $\Rightarrow$ Eulers formel?

Vi vet att grafen har:

- v hörn
- e kanter
- r regioner

Vi vet också att:

- Varje hörn har gradtal 4 $\Rightarrow \deg(v) = 4$, för alla v (1)
- $v - e + r = 2$ (Eulers formel) (2)
- $\sum_v \deg(v) = 2e$ (Handskakningslemmat) (3)

Vi söker:

- Antal regioner (r) som funktion av antal kanter (e)

Ekv. (2) ger:

$$v - e + r = 2 \iff r = 2 + e - v$$

Problematisk! Vill skriva v som funktion av e

Ekv. (1) i (3) ger:

$$\sum_v \deg(v) = 2e \iff 4v = 2e \iff v = \frac{e}{2}$$

Med $r = 2 + e - v$ och $v = \frac{e}{2}$ får vi:

$$r = 2 + e - \frac{e}{2} = 2 + \frac{e}{2} \quad \blacksquare$$

Ekvationer av typ $x_1 + \dots + x_n = k$

- Vissa kombinatoriska problem kan översättas till att lösa problemet "Bestäm antal lösningar till ekv. $x_1 + \dots + x_n = k$, $x_i \geq 0$"
- Känt svar, antalet är $\binom{k+n-1}{k}$ där k = konstant i HL, n = antal variabler

Exempel 2017-08-17 #3

Hur många positiva heltal mindre än 100 000 finns det, om summan av talets siffror är ≤ 20?

Lösning

- $< 100\,000 \Rightarrow 0$ till $99\,999$ (5 siffror max)
- Tänk talet 5 6 7 8 9. Varje siffra kan representeras av en variabel: $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$. Vi ser att $0 \leq x_i \leq 9$ måste gälla.
- Summan av siffrorna $\leq 20 \Rightarrow x_1 + \dots + x_5 \leq 20$

$\therefore$ Problemet kan formuleras som

Antal lösningar till : $\begin{cases} x_1 + \dots + x_5 \leq 20 \\ 0 \leq x_i \leq 9, \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$

1) Jämför med känd lösning $x_1 + \dots + x_n = k$. Likhet!

Vi har $\leq k$, så inför slackvariabel:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_5 \leq 20 \\ 0 \leq x_i \leq 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_5 + s = 20 \\ 0 \leq x_i \leq 9 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Detta är standardformen

2) Vi kan nu beräkna totalt antal lösningar

$$\begin{cases} \underbrace{x_1 + \dots + x_5 + s}_{n = 6 \text{ st variabler}} = \underbrace{20}_{k=20} \\ x_i, s \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-k+1}{k} = \binom{20+6-1}{20} = \binom{25}{20} \text{ lösn.}$$

3) Men, har inte tagit hänsyn till ogiltiga lösningar, t.ex. $x_i \geq 10$

(Eftersom vi hade krav $x_i \leq 9$)

Därför: räkna bort dessa!

Idén är: $\underbrace{\text{alla lösningar}}_{x_i \geq 0} - \underbrace{\text{ogiltiga lösningar}}_{\text{något } x_i \geq 10} = \text{giltiga}$

Lösning, forts

3) Antag $x_1 \geq 10$. Detta är ogiltigt.

Inför ny variabel: $t = x_1 - 10 \geq 0$

Får ny ekvation: $x_1 + \dots + x_5 + s = 20$

$$\hookrightarrow \underbrace{(x_1 - 10)}_{=t} + \dots + x_5 + s = 20 \underbrace{-10}_{\text{justera}}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{t + \dots + x_5 + s}_{n=6 \text{ st variabler}} = \underbrace{10}_{k=10}$$

4) Denna ekvation är på standardform, känd lösning:

$$\begin{cases} n=6 \\ k=10 \end{cases} \Rightarrow \text{antal lösningar} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{15}{10} \quad \blacksquare$$

5) På samma sätt för $x_2 \geq 10$, $x_3 \geq 10$ osv.

Vi får $5 \times \binom{15}{10}$ ogiltiga lösningar för $x_i \geq 10$, $i = 1, \dots, 5$

6) Då har vi dock dubbelräknat fallen där $\underbrace{x_1 \geq 10 \text{ och } x_2 \geq 10}_{\text{"2 variabler } \geq 10\text{"}}$!

$\Rightarrow$ Måste dra bort dessa m.h.a. PIE.

Antag $x_1 \geq 10$ och $x_2 \geq 10$. Detta är ogiltigt.

Samma idé som ovan, inför 2 nya variabler:

$$\begin{cases} t_1 = x_1 - 10 \geq 0 \\ t_2 = x_2 - 10 \geq 0 \end{cases}$$

Får ny ekvation: $x_1 + \dots + x_5 + s = 20$

$$\hookrightarrow \underbrace{(x_1 - 10)}_{=t_1} + \underbrace{(x_2 - 10)}_{=t_2} + \dots + x_5 + s = 20 \underbrace{-10-10}_{\text{justera}}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{t_1 + t_2 + x_3 + \dots + x_5 + s}_{n=6 \text{ st lösningar}} = \underbrace{0}_{k=0}$$

7) Denna ekvation är på standardform

$$\begin{cases} n=6 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow \text{antal lösningar} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{5}{0} = 1 \quad \blacksquare$$

8) Detta var för en kombination x_1 och x_2.
Måste också ta hänsyn till x_1 och x_3, x_1 och x_4 osv.
Hur många?

$$\begin{cases} 5 \text{ variabler att välja mellan } (x_1, \dots, x_5) \\ \text{Ska välja } 2 \text{ st} \end{cases} \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \text{ komb.}$$

Dvs. totalt antal ogiltiga lösningar för x_i & x_j:

10 kombinationer × 1 lösning/kombination = 10 lösningar.

9) Om vi drar bort dessa, så har vi dock dragit bort fallen där $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 10$, $x_3 \geq 10$ (dvs 3 variabler ≥ 10)

$\Rightarrow$ Måste lägga tillbaka dessa m.h.a. PIE

Antag $x_1, x_2, x_3 \geq 10$. På samma sätt som ovan, inför 3 nya variabler:

$$\begin{cases} t_1 = x_1 - 10 \geq 0 \\ t_2 = x_2 - 10 \geq 0 \\ t_3 = x_3 - 10 \geq 0 \end{cases}$$

Får ny ekvation: $(x_1 - 10) + (x_2 - 10) + (x_3 - 10) + \dots + x_5 + s =$

$$= \underbrace{20 - 10 - 10 - 10}_{= -10 < 0 \ !}$$

10) OBS! Vi ser att HL < 0
Men vi har krav $x_i \geq 0$ och $s \geq 0$, så här finns inga lösningar.

$\therefore$ För $x_i, x_j, x_k \geq 10$ finns 0 lösningar.

$\therefore$ P.s.s. fyra variabler ≥ 10 saknar lösningar.
fem variabler ≥ 10 saknar lösningar.

11) Total − ogiltiga lösningar: alternerande ± pga. PIE

$$\underbrace{\binom{25}{20}}_{\text{alla}} - \underbrace{5\binom{15}{10}}_{\text{minst en variabel} \geq 10} + \underbrace{10\binom{5}{2}}_{\text{minst två variabler} \geq 10} - \underbrace{0 + 0 - 0}_{\text{minst } 3, 4, 5 \text{ variabler} \geq 10} = \binom{25}{20} - 5\binom{15}{10} + 10$$