Föreläsning 4

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren

oliwe188@student.liu.se

https://www.instagram.com/olwettergren/

Kontinuerliga stokastiska variabler

En s.v. X sägs vara kontinuerlig, om det existerar en s.k. täthetsfunktion, $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, sådan att:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alla stokastiska variabler som inte är diskreta är kontinuerliga.

Egenskaper:

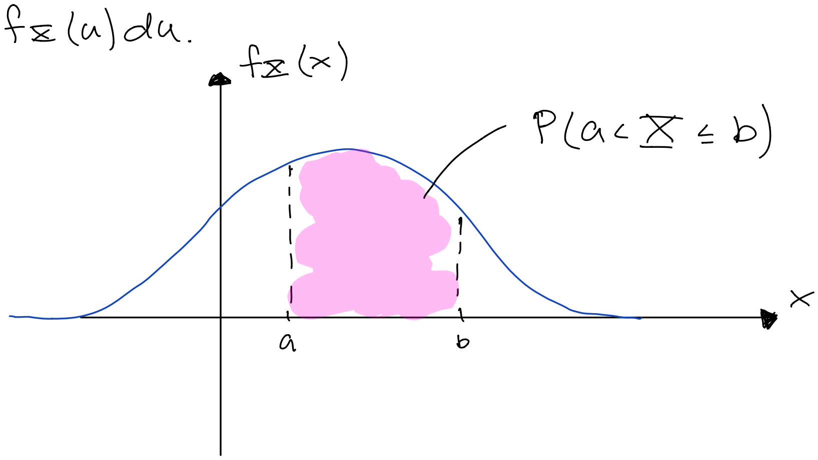
1) $P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(u)\,du \quad \forall a < b$

[Mer allmänt: $P(X \in A) = \int_{A} f_X(u)\,du \quad \forall A \subset \mathbb{R}$]

Bevis:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(u)\,du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u)\,du =$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(u)\,du.$$



2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\,du = 1$

3) Om X är kontinuerlig, så är F_X kontinuerlig (i analysmening). (Jämför med en diskret s.v. X: dess F_X är styckvis konstant, och har minst en diskontinutetspunkt)

Bevis:

Fallet då $f_X(x) \le C$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x+h) - F_X(x) = \int_x^{x+h} \underbrace{f_X(u)}_{\le C}\,du \le C(x+h-x) = Ch \to 0$$

då $h \to 0$

4) $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

[Därför gäller $P(a < X \le b) = P(a < X < b) =$
$= P(a \le X \le b) = P(a \le X < b)$]

Bevisidé:

$$P(X = x) = \lim_{\delta \to 0} P(x - \delta < X \le x) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left(F_X(x) - F_X(x-\delta)\right) = 0$$

5) $F_X'(x) = f_X(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ där f_X är kontinuerlig

6) Varje $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sådana att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

är en täthetsfunktion till något kontinuerlig s.v. X.

7) Versioner av en täthetsfunktion: skiljer sig åt i ändligt eller uppräkneligt många punkter. Svarar mot samma F_X

Ex:

Låt X vara en kontinuerlig s.v., med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Beräkna $P(2 < X < 5)$ och F_X.

$$P(2 < X < 5) = \int_2^5 f_X(x)\,dx = \int_2^5 \frac{1}{3} e^{-x/3}\,dx = \left[-e^{-x/3}\right]_2^5 =$$

$$= e^{2/3} - e^{5/3} \approx 0,32.$$

Beräkna F_X, beräkna $F_X(x)$ för varje $x \in \mathbb{R}$

Fall 1 $(x < 0)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot du = 0$$

Fall 2 $(x \geq 0)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_0^x \frac{1}{3} e^{-u/3}\,du = \left[e^{-u/3}\right]_0^x = 1 - e^{-x/3}$$

Alltså:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x/3}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kontroll:

$$F_X' = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3} e^{-x/3}, & x > 0 \end{cases}$$

Vi ser att:

F_X kontinuerlig.

$F_X'(x) = f_X(x) \quad \forall x \neq 0.$

B 3.13

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm c så att f är en täthetsfunktion

Villkor:

$c > 0$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^6 cx^2\,dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = c\,\frac{6^3}{3} = 72c = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{72}$$

B. 3.12

X = försening (i minuter), en kontinuerlig s.v., med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$P(X > 3) = \int_3^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_3^5 \frac{1}{5}\,dx = \frac{2}{5}$$

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}.$$

Några viktiga kontinuerliga sannolikhetsfördelningar

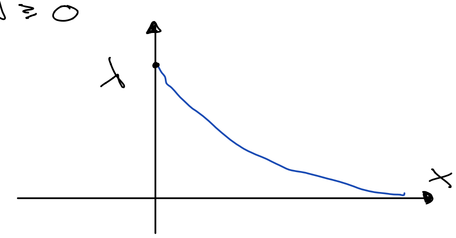
a) Likformig fördelning

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Kodbeteckning: $X \sim U(a, b)$

b) Exponentialfördelning

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \quad \text{där } \lambda \ge 0$$



Kodbeteckning: $X \sim \exp(\lambda)$

Varning: I en del literatur används kodbeteckning $\exp(\mu)$, där $\mu = \frac{1}{\lambda}$

SATS: Exponentialfördelning minneslöshet

Om $X \sim \exp(\lambda)$, så är $P(X \leq t+x \mid X > t) = P(X \leq x)$,

$\forall\, x, t \geq 0$

Bevis:

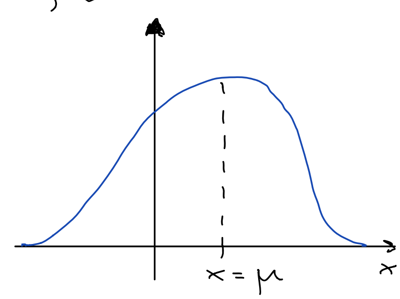
$$P(X \leq t+x \mid X > t) = \frac{P(\{X > t\} \cap \{X \leq t+x\})}{P(X > t)} =$$

$$= \frac{P(t < X \leq t+x)}{P(X > t)} = \frac{\int_t^{t+x} f_X(u)\,du}{\int_t^{\infty} f_X(u)\,du} = \frac{\int_t^{t+x} \lambda e^{-\lambda u}\,du}{\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\,du} =$$

$$= \frac{\left[-e^{-\lambda u}\right]_t^{t+x}}{\left[-e^{-\lambda u}\right]_t^{\infty}} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda t} = P(X \leq x)$$

c) Normalfördelning

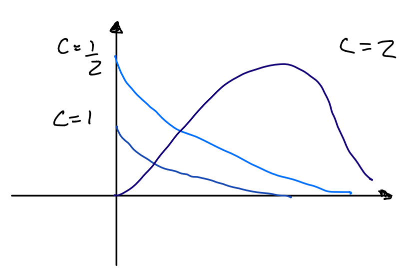
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$



Kodbeteckning: $X \sim N(\mu, \sigma)$

d) Weibullfördelning

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda c (\lambda x)^{c-1} e^{-(\lambda x)^c}, & x > 0 \\ 0, \ x \leq 0, \end{cases} \qquad \text{där } \lambda, c > 0$$



e) Gammafördelning

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^c}{\Gamma c} x^{c-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$ där $\lambda, c > 0$ och $\Gamma(c) = \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt$

4.20

tänk på λ eller μ.

$X \sim \exp\left(\frac{1}{10}\right)$, dvs

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X > 5 \mid X \leq 7) = \frac{P(\{X > 5\} \cap \{X \leq 7\})}{P(X \leq 7)} =$$

$$= \frac{P(5 < X \leq 7)}{P(X \leq 7)},$$

där

$$\begin{cases} P(5 < X \leq 7) = \int_5^7 f_X(x)\,dx = \int_5^7 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_5^7 = e^{-\frac{5}{10}} - e^{-\frac{7}{10}} \\ P(X \leq 7) = \int_{-\infty}^7 f_X(x)\,dx = \int_0^7 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\,dx = \dots = 1 - e^{-\frac{7}{10}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X > 5 \mid X \leq 7) \approx 0{,}22$$

4.19

X_1 = draghållfasthet hos wire nr. 1

X_2 = draghållfasthet hos wire nr 2.

X_1, X_2 har båda täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

X_1 och X_2 är oberoende s.v (dvs $\{X_1 \in A\}$ och $\{X_2 \in B\}$ är oberoende händelser, $\forall A, B \subset \mathbb{R}$)

a) $P(\{X_1 > 0,5\} \cup \{X_2 > 0,5\}) = P(X_1 > 0,5) +$
$+ P(X_2 > 0,5) - P(\{X_1 > 0,5\} \cap \{X_2 > 0,5\}) = \text{ober.} =$
$= P(X_1 > 0,5) + P(X_2 > 0,5) - P(X_1 > 0,5) \cdot P(X_2 > 0,5) =$
$= (*)$.

$$P(X_1 > 0,5) = P(X_2 > 0,5) = \int_{0,5}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0,5}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx =$$

$$= \left[-e^{x^2}\right]_{0,5}^{\infty} = e^{-0,5^2} \Rightarrow (*) \approx 0,95.$$

c) Antag att vi har n st oberoende wires
(och n st draghållfastheter $X_1, X_2, \dots, X_n$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > 0,5\}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le 0,5\}\right) = \text{ober.} =$$

$$= 1 - P(X_i \le 0,5)^n = 1 - \left(1 - e^{-0,5^2}\right)^n \overset{\text{krav}}{\geq} 0,99$$

Detta ger:

$$n \geq \frac{\ln(1-0,99)}{\ln(1-e^{-0,5^2})} \approx 3,05 \Rightarrow 4 \text{ wires behövs.}$$