# Föreläsning 2

TAMS14 – Sannolikhetslära

Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

## Betydande sannolikheter

Låt A och B vara händelser (i utfallsrummet $\Omega$) och $P(B) > 0$. Den såkallade betingade sannolikheten för A givet B ges av:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Tolkning av begreppet sannolikhet:

1) Gränsvärde av den den relativa frekvensen för A, då försöket upprepas många gånger.

2) P(A) är ett "mått" på personens tro att A kommer inträffa.
P(A | B) är ett "mått" på en persons nya, modifierade tro på att A kommer inträffa, efter att man har fått veta att B har inträffat.

Ex:

Vi har 20 blyertspennor av olika färg (röd /svart) och hårdhetsgrad (hård / mjuk), enligt tabell:

Dra en penna på måfå:

A = "pennan är röd"
B = "pennan är svart"

| | röd | svart |
|---|---|---|
| hård | 2 | 8 |
| mjuk | 8 | 2 |

Beräkna P(A), P(B) och $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\Omega$ = alla pennor (lika sannolika)

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{g(A)}{m} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{g(A \cap B)}{m} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \mid B) = \frac{2/5}{1/2} = \frac{4}{5}$$

**Ex 3.2:**

Dra ett kort på måfå och titta på ena sidan (vald på måfå)

A = "Den betraktade sidan är röd"

B = "Den andra sidan är röd"

Sökt är $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\Omega$ = Alla kortsidor (lika sannolika)

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

kan vända på två sätt

$$P(A \cap B) = \frac{g(A \cap B)}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

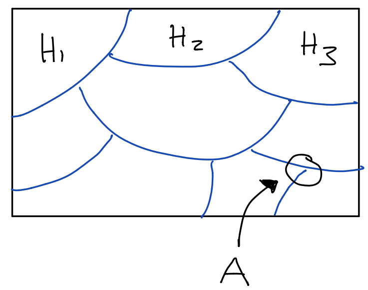
**SATS:** 2,9 Lagen om total sannolikhet

Låt $H_1, H_2, \dots, H_n$ vara disjunkta händelser, sådana att

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$$

Låt $A$ vara en händelse.

Då är




$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)\, P(H_i)}$$

**Bevis:**

Disjunkta

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n)$$

Def. av betingad sannolikhet $\Rightarrow$

$$P(A \cap H_1) = P(A \mid H_1)\, P(H_1) \quad \text{osv.}$$

**SATS:** 2.10 Bayers Sats

Låt $H_1, H_2, \dots, H_n$ uppfylla samma villkor som i sats 2.9

Låt $A$ vara en händelse. Då är

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k)\, P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)\, P(H_i)}$$

**Bevis:**

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \overset{\text{Sats 2.9}}{=} \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$

**Ex:** Kasta en tärning två gånger.

A = "6a i kast 1", B = "6a i kast 2"

Avgör om A och B är oberoende.

$\Omega = \{(k,l);\ k = 1,\dots,6,\ l = 1,\dots,6\}$ lika sannolika!

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{g(B)}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{g(A \cap B)}{m} = \frac{1}{36} = g(A) \cdot g(B)$$

Alltså oberoende!

**SATS:**

Om A och B är oberoende, så gäller även:

1) $A^c$ och $B^c$ är oberoende

2) $A$ och $B^c$ är oberoende

3) $A^c$ och $B$ är oberoende.

**Bevis:**

Av 1) ska vi visa att $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B^c) \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B)) \underset{\text{A och B oberoende}}{=} 1 - P(A) - P(B) +$$

$$+ P(A)P(B) = (1 - P(A) + P(B))(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$$

## Generalisering av oberoendebegreppet:

Tre händelser A, B, C sägs vara oberoende om:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Om A, B, C är oberoende så är även $A^c, B^c, C^c$ oberoende, $A^c, B, C$ oberoende osv...

## Ex: 3.1

Dra ett paket på måfå och en spik ur paketet på måfå.

A = "paketet från leverantör A"

B = "paketet från leverantör B"

C = "paketet från leverantör C"

D = "spiken är defekt".

Sökt är $P(D)$!

Givet:

$P(A) = 0{,}6$ $\quad P(B) = 0{,}3$ $\quad P(C) = 0{,}1$

$P(D \mid A) = 0{,}05$ $\quad P(D \mid B) = 0{,}07$ $\quad P(D \mid C) = 0{,}1$

Använd sats 29 med $H_1 = A$, $H_2 = B$, $H_3 = C$
($A, B, C$ är disjunkta och $\Omega = A \cup B \cup C$)

$$P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) = \ldots = 0{,}061$$

Extrafråga:

Vi drar spiken och ser att den är defekt. Givet detta, vad är sannolikheten att paketet kom från leverantör A.

Sökt är $P(A \mid D)$, Bayers sats $\Rightarrow$

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}6}{0{,}061} = 0{,}49.$$

Oberoende händelser

Låt $A \in \Omega$ och $B \in \Omega$ vara händelser.

A och B sägs vara oberoende, om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

SATS:

Om $P(B) > 0$, så är A och B oberoende om och endast om

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Bevis:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) P(B)$$

Så om

$$P(A \mid B) = P(A)$$

fås oberoende medan A och B är oberoende

måste

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Analogt kan vi definiera 4 oberoende händelser

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + 1 = 11 \text{ villkor!} ,$$

5 oberoende händelser osv...

Ex 3.12

A = "A-fel" B = "B-fel" C = "C-fel"

A, B och C är oberoende.

$P(A) = 0,1$ $P(B) = 0,07$ $P(C) = 0,05$

D = "exakt ett fel inträffar"

Beräkna $P(A \mid D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)}$

$A \cap D = A \cap B^c \cap C^c \Rightarrow P(A \cap D) = P(A \cap B^c \cap C^c) =$

$= \underbrace{\{A, B^c, C^c\}}_{\text{oberoende}} = P(A)\,P(B^c)\,P(C^c) = 0{,}1 \cdot (1-0{,}07) \cdot (1-0{,}05)$

$D = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(D) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) +$

$+ P(A^c \cap B \cap C^c) = P(A)\,P(B^c)\,P(C^c) + P(A^c)\,P(B)\,P(C^c) +$

$+ P(A^c)\,P(B^c)\,P(C) \Rightarrow P(A \mid D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} \approx \ldots \approx$

$\approx 0{,}46.$

Står inget om att A och D är oberoende, så det måste då visas innan.

## Ex 3.22

A = "1:a minst en gång", B = "6:a minst en gång"

Sökt är $P(A \cap B)$ (ej oberoende då tron på den ena kan ändras när man vet att den andra är sann)

$P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)^c = 1 - P(A^c \cup B^c) =$

$= 1 - (P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c))$

Låt

$$\begin{cases} A_k = \text{"1:a i kast nr } k\text{"}, \; k = 1, \ldots, 10 & \text{(oberoende)} \\ B_k = \text{"6:a i kast nr } k\text{"}, \; k = 1, \ldots, 10 & \text{(oberoende)} \end{cases}$$

$P(A^c) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{10}^c) = \{\text{oberoende}\} =$

$= P(A_1^c)P(A_2^c)\ldots P(A_{10}^c) = \left(\frac{5}{6}\right)\ldots\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

$P(B^c) = P(B_1^c \cap B_2^c \cap \ldots \cap B_{10}^c) = \{\text{oberoende}\} =$

$= P(B_1^c)P(B_2^c)\ldots P(B_{10}^c) = \ldots = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

$P(A^c \cap B^c) = P(A_1^c \cap B_1^c \cap A_2^c \cap B_2^c \cap \ldots \cap A_{10}^c B_{10}^c) =$

$= \{\text{oberoende}\} = P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2^c \cap B_2^c)\ldots P(A_{10}^c \cap B_{10}^c) =$

$= \left(\frac{4}{6}\right)\ldots\left(\frac{4}{6}\right)^{10}$

$\therefore \quad P(A \cap B) = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,69$