# Föreläsning 6

TAMS14 – Sannolikhetslära


Skriven av Oliver Wettergren

oliwe188@student.liu.se

https://www.instagram.com/olwettergren/

## Funktioner av stokastiska variabler

Låt $X$ vara en stokastisk variabel och låt

$$Y = g(X),$$

där

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

är en funktion.

[Mer allmänt: låt $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vara en n-dimensionell s.v., och låt $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ där $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$]

## Problem:

Hur kan vi beräkna sannolikhets- och täthetsfunktionen för $Y$, om vi känner sannolikhets- och täthetsfunktionen för $X$.

1) Om $Y$ är diskret: Bestäm först värdemängden $S_Y$. Beräkna $p_Y$, dvs, beräkna

$$\underbrace{p_Y(y) = P}_{\text{olika } p}(Y = y) = P(g(X) = y) = \sum_{g(x)=y} p_X(x) \quad \forall y \in S_Y$$

2) Om $Y$ inte är diskret: Beräkna först $F_Y$, dvs, beräkna

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Utnyttja sedan att

$$F'_Y(y) = f_Y(y),$$

om $f_Y$ är kontinuerlig i $y$.

Kallad "Allmänna metoden".

Ex:

Låt $X$ vara en diskret s.v, med

$$S_X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

och

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_X(x)$ | 0,02 | 0,08 | 0,15 | 0,5 | 0,15 | 0,08 | 0,02 |

Låt

$$Y = g(X) = X^2.$$

Då är $Y$ diskret, med

$$S_Y = \{0, 1, 4, 9\}.$$

$$p_Y(0) = P(Y=0) = P(X^2=0) = \sum_{x^2=0} p_X(x) = p_X(0) = 0{,}5,$$

$$p_Y(1) = P(Y=1) = P(X^2=1) = \sum_{x^2=1} p_X(x) = p_X(1) + p_X(-1) = 0{,}3.$$

$$p_Y(4) = P(Y=4) = P(X^2=4) = \sum_{x^2=4} p_X(x) = p_X(2) + p_X(-2) = 0{,}16$$

$$p_Y(9) = \ldots = p_X(3) + p_X(-3) = 0{,}04$$

Ex 5.14:

Låt

$$X \sim U(0,1),$$

dvs,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Låt $Z = g(X) = e^X$. Beräkna $f_Z$. Beräkna $F_Z$. Vi ser att $P(1 < Z < e) = P(0 < X < 1) = 1$

Fall 1 $(z \leq 1)$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$$

Fall 2 $(z \geq e)$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1$$

Fall 3 $(1 < z < e)$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(e^X \leq z) = P(X \leq \ln z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln z} f_X(x)\,dx = \int_0^{\ln z} 1 \cdot dx = \ln z.$$

Alltså:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 1 \\ \ln z, & 1 < z < e \\ 1, & z \geq e \end{cases}$$

Vi får

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 1/z, & 1 < z < e \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Låt

$$Y = (X-1)^2.$$

Beräkna $F_Y$. Vi ser att

$$P(0 < Y < 1) = P(0 < X < 1) = 1.$$

Fall 1 $(y \leq 0)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$$

Fall 2 $(y \geq 1)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1, \quad \text{ty } 0 < Y < 1 \text{ med sannolikhet } 1.$$

Fall 3 $(0 < y < 1)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X-1)^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} < X - 1 < \sqrt{y}) =$$

$$= P(1-\sqrt{y} < X < 1+\sqrt{y}) =$$

$$= \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f_X(x)\,dx = \int_{1-\sqrt{y}}^{1} 1 \cdot dx = 1 - (1-\sqrt{y}) = \sqrt{y}$$

Alltså:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \sqrt{y}, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Vi får:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1/2\sqrt{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Ex 5.18:

I och R är oberoende s.v med

$$f_I(i) = \begin{cases} 2i, & 0 < i < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$f_R(r) = \begin{cases} r^2/9, & 0 < r < 3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Detta ger:

$$f_{I,R}(i,r) = f_I(i) \cdot f_R(r) = \begin{cases} 2i \cdot r^2/9, & 0 < i < 1 \text{ och } 0 < r < 3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Låt

$$U = g(I,R) = IR.$$

Beräkna $f_U$. Beräkna först $F_U$.

Vi ser att

$$P(0 < U < 3) = 1.$$

Fall 1 $(u \le 0)$:

$$F_U(u) = P(U \le u) = 0$$

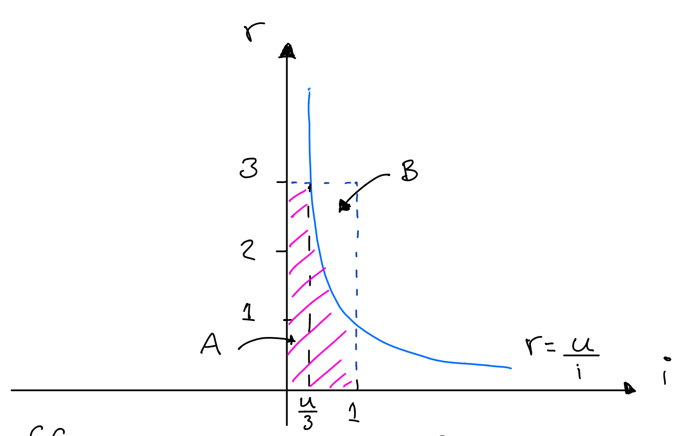
Fall 2 $(u \ge 3)$:

$$F_U(u) = P(U \le u) = 1$$

Fall 3 $(0 < u < 3)$

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(U \le u) = P(IR \le u) = P((I,R) \in A) = (*)$$

se figur.




$$(*) = \iint_A f_{I,R}(i,r)\,dr\,di = 1 - \iint_B f_{I,R}(i,r)\,dr\,di = 1 - \int_{\frac{u}{3}}^{1} \int_{\frac{u}{i}}^{3} \frac{2ir^2}{9}\,dr\,di =$$

$$= 1 - \int_{u/3}^{1} \frac{2i}{9} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{u/i}^{3} di = 1 - \int_{u/3}^{1} \frac{2i}{9} \left( 9 - \frac{u^3}{3i^3} \right) di =$$

$$= 1 - \frac{2}{9} \left[ \frac{9i^2}{2} + \frac{u^3}{3i} \right]_{u/3}^{1} = \dots = \frac{u^2}{9} - \frac{2}{27} u^3 + \frac{2}{9} u^2$$

Alltså:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ \frac{u^3}{3} - \frac{2}{27} u^3, & 0 < u < 3 \\ 1, & u \geq 3 \end{cases}$$

Vi får:

$$f_U(u) = F'_U(u) = \begin{cases} \frac{2}{3} u - \frac{2}{9} u^2, & 0 < u < 3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

## Summor av stokastiska variabler

**SATS:**

Låt $(X, Y)$ vara en 2-dim heltalsvärd s.v., och låt $Z = X + Y$. Då är $Z$ heltalsvärd, med:

diskret

$$p_Z(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

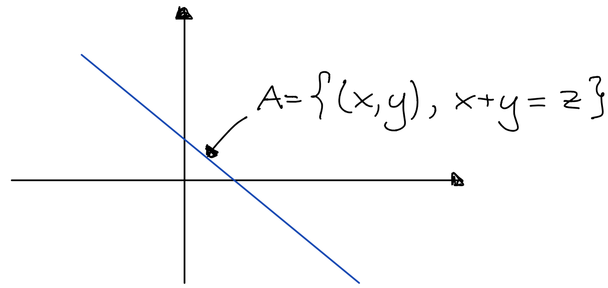
Om $X$ och $Y$ är oberoende fås:

$$p_Z(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x)$$

**Bevis:**

$$p_Z(z) = P(Z=z) = P((X,Y)\in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y) =$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x)$$




**SATS:**

Låt $(X,Y)$ vara en 2-dim kontinuerlig s.v. och låt $Z=X+Y$. Då är $Z$ kontinuerlig med

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Om $X$ och $Y$ är oberoende fås:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

**Ex 5,16**

Låt $X_1, X_2$ vara oberoende och $\exp(\frac{1}{\mu})$-fördelade S.V. Dvs,

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Låt $Z = X_1 + X_2$. Då är:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,dx = \int_0^z \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \cdot \frac{1}{\mu} e^{-(z-x)/\mu} dx =$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu^2} e^{-z/\mu} dx = \frac{z}{\mu^2} e^{-z/\mu}, \text{ om } z \geq 0.$$

$f_Z(z) = 0$ annars.

## Maximum och minimum av stokastiska variabler

**SATS:** Maximum

Låt $X$ och $Y$ vara oberoende s.v. Låt

$$Z = \max(X, Y).$$

Då gäller:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\{X \leq z\} \cap \{Y \leq z\}) = \{\text{oberoende}\} =$$
$$= P(X \leq z) P(Y \leq z) = F_X(z) F_Y(z)$$

**SATS:** Minimum

Låt $X$ och $Y$ vara oberoende s.v. Låt

$$Z = \min(X, Y).$$

Då gäller:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(\{X > z\} \cap \{Y > z\}) =$$
$$= \{\text{oberoende}\} = 1 - P(X > z) P(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

Ex:

Låt

$$X_1 \sim \exp(\lambda_1), \quad X_2 \sim \exp(\lambda_2).$$

Låt $X_1, X_2$ vara oberoende. Låt

$$Z = \min\{X_1, X_2\}$$

Då gäller:

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z)) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Vi vet (se tidigare föreläsning):

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

Och motsvarande för $X_2$. Vi får

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} = 1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

Till sist:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z}, & z > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Dvs,

$$Z \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2).$$