Föreläsning 1

TAOP07 – Optimeringslära grundkurs

Introduktion och viktiga begrepp

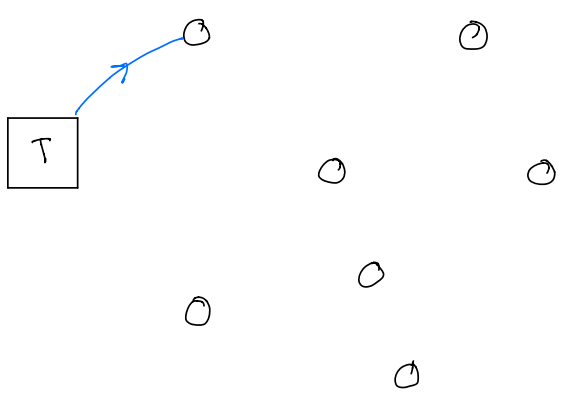
Skriven av Oliver Wettergren
oliwe188@student.liu.se
https://www.instagram.com/olwettergren/

- Optimal - bästa möjliga.
- Används i tekniska och ekonomiska beslutsproblem.
- Optimerat: flygplansvinge eller
  mobiltelefoniantenn
  raffinaderier
  paketutkörning.
  produktion och lagerhållning.

Beslut- och planeringsproblem

Typiskt:

- många frihetsgrader
- tydlig målsättning
- tydliga restriktioner (varje kund måste få paket)
- kvantifierbarhet

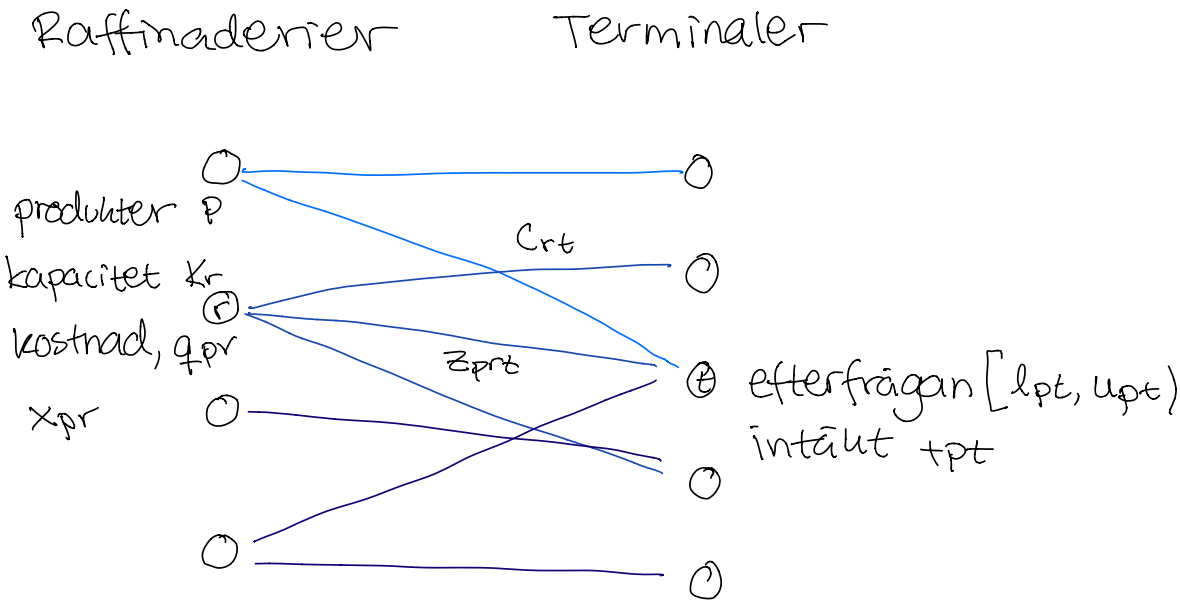


n kunder

=> n! olika sätt

Problem: Raffinaderier

- Raffinaderier, R
- Kapaciteter, K_r, $r \in R$
- Terminaler, T
- Minimal efterfrågan, l_{pt}, Maximal efterfrågan, u_{pt}
- Försäljningsintäkt, f_{pt}
- Kostnad, q_{pr}
- Fraktkostnad, c_{rt}
- Produkter, P.



Metodik:

- Vad kan varieras? Modellens variabler
- Vad är målsättningen? Vinsten i det här fallet.
- Vilka restriktioner begränsar valfriheten? Ger bivillkoren.

- Observera: skilj på givna förutsättningar och vad som kan varieras.

Variabeldefinition:

x_{pr} = producerad mängd av produkt p vid raffinaderier, r

z_{prt} = transporterad mängd av p från r till terminal t.

Målfunktion:

$$\max z = \sum_p \sum_r \sum_t (f_{pt} - c_{rt}) z_{prt} - \sum_p \sum_r q_{pr} x_{pr}$$

då $$l_{pt} \leq \sum_r z_{prt} \leq u_{pt} \quad \forall p, t \quad (1)$$

$$x_{pr} = \sum_t z_{prt} \quad \forall p, r \quad (2)$$

$$\sum_p x_{pr} \leq k_r \quad \forall r \quad (3)$$

$$x_{pr}, z_{prt} \geq 0$$

Problemstorlek

2 produkter, 5 raffinaderier och 20 terminaler

210 variabler

55 villkor

Grundläggande begrepp

Givet: En sluten mängd $X \subseteq \mathbb{R}^n$ och en kontinuerlig funktion $f: X \to \mathbb{R}$

Sökt: Ett $x^* \in X$ sådant att $f(x^*) \leq f(x)$ gäller för alla $x \in X$. Kallas ett globalt minimum.

Skriver: $\min\limits_{\text{då } x \in X} f(x) = \min\limits_{x \in X} f(x)$

Kallas optimeringsproblem.

OBS: x är en punkt i $\mathbb{R}^n$, dvs

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ofta beskrivs X av bivillkor.

Ex:

$$f^* = \min f(x) = x_1^2 + 3x_2 + e^{x_1 + x_3}$$

$$\text{då} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 & (1) \\ \sqrt{x_1} + x_2 x_3 \geq 5 & (2) \\ x_1 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Här: $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (1), (2), (3) \text{ är uppfyllda}\}$

Terminologi

x: variabler

X: mängd av tillåtna funktioner

f: målfunktion

$f(x)$: målfunktionsvärdet i x

x^*: optimallösning

$f(x^*)$: optimalt målfunktionsvärde; skrivs f^*

x^*, $f(x^*)$: ett optimum (eller minimum)

Fall av optimeringsproblem

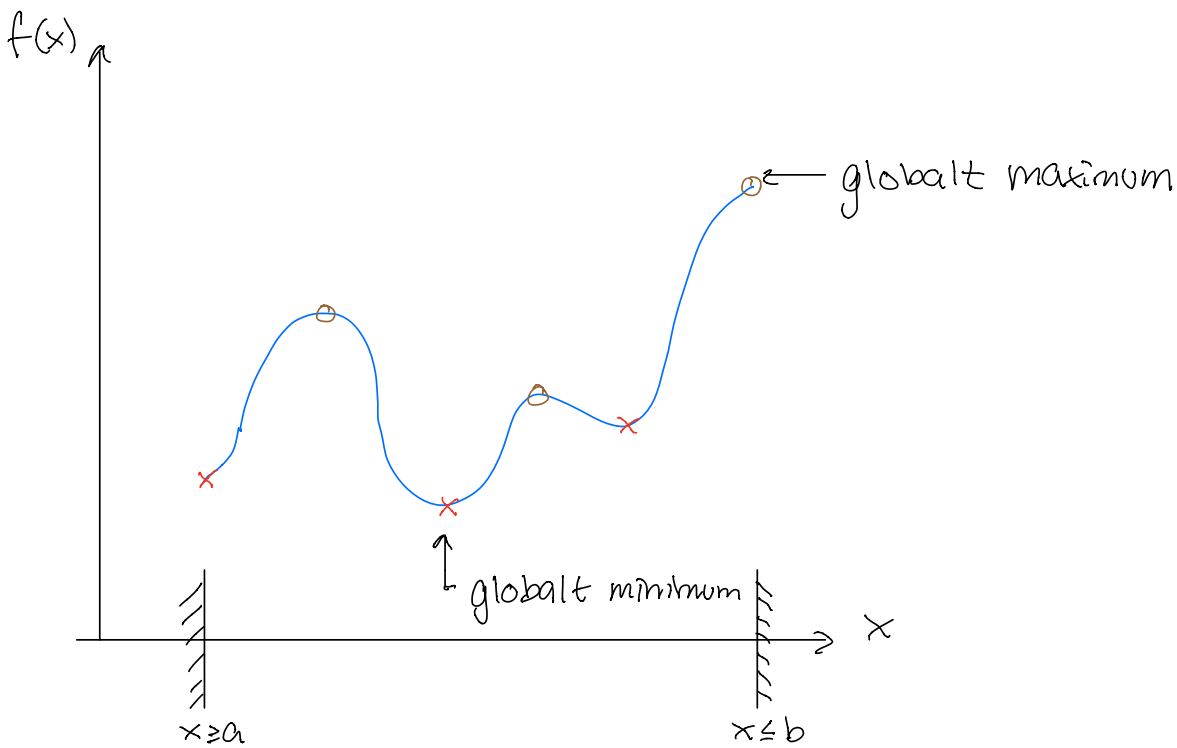
- Om $X = 0$ så saknar problemet tillåten lösning ($f^* = +\infty$)
- Om $f \to -\infty$ på X så har problemet obegränsat optimum ($f^* = -\infty$)
- Om det finns distinkta (olika) $x^1, x^2 \in X$ sådana att $f(x^1) = f(x^2) = f$ så har problemet alternativa optima
- Om $f(x^*) < f(x)$ för alla $x \in X$ sådana att $x \neq x^*$ så har problemet unikt optimum (i x^*)

Komplikation:

Det kan finnas lokala minimum som inte är globala.

Def.

En punkt $x^* \in X$ är ett lokalt minimum om $f(x^*) \leq f(x)$ gäller för alla $x \in X \cap \{x \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ för något $\varepsilon > 0$.



o = lokala maxima

× = lokala minima

När är lokala minima också alltid globala?

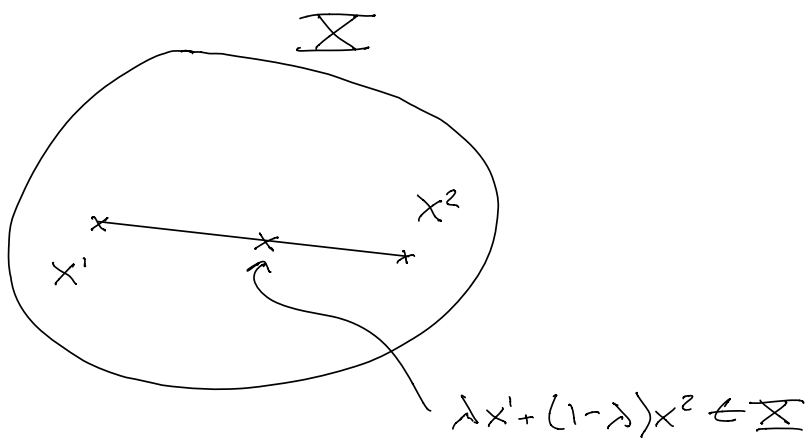
Nytt begrepp: konvexitet

Konvexitet

Def:

En mängd $X \subseteq \mathbb{R}^n$ är konvex om för alla $x^1, x^2 \in X$ och $\lambda \in [0,1]$ gäller att

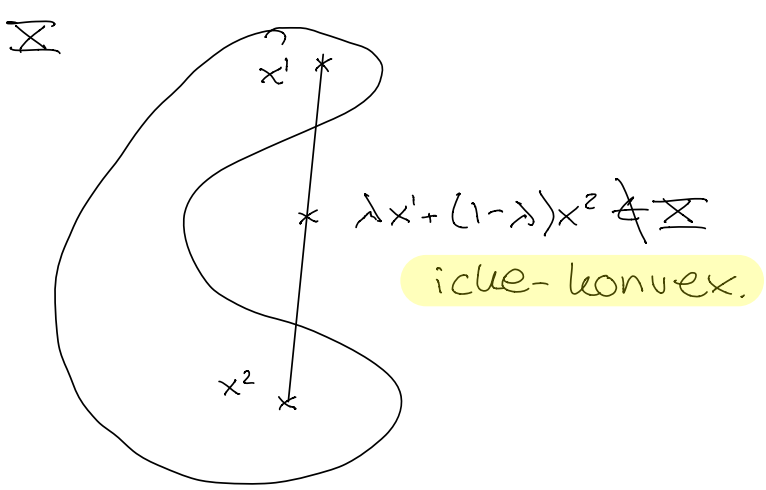
$$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in X.$$



$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 = x^2 + \lambda (x^1 - x^2)$ linje!

$\lambda = 0 \rightarrow x^2$

$\lambda = 1 \rightarrow x^1$



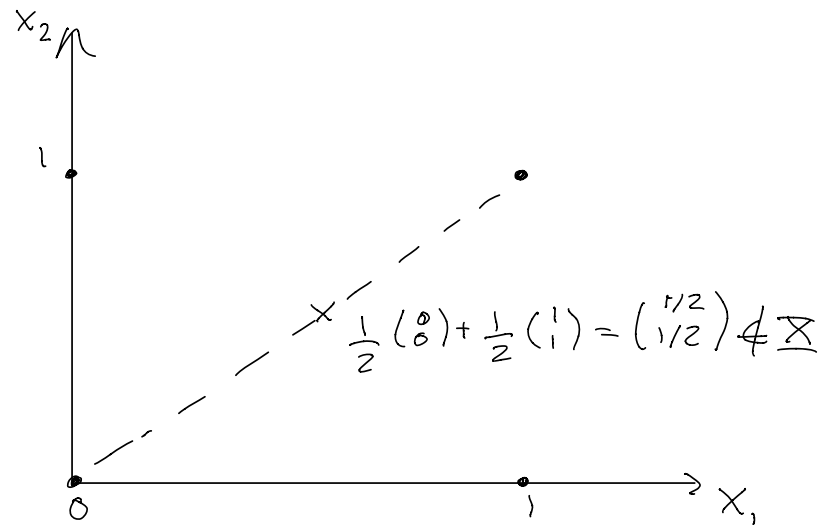
icke-konvex.

$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$ är en konvexkombination av x^1 och x^2.

Obs: En diskret mängd med mer än ett element är alltid icke-konvex.

Ex:

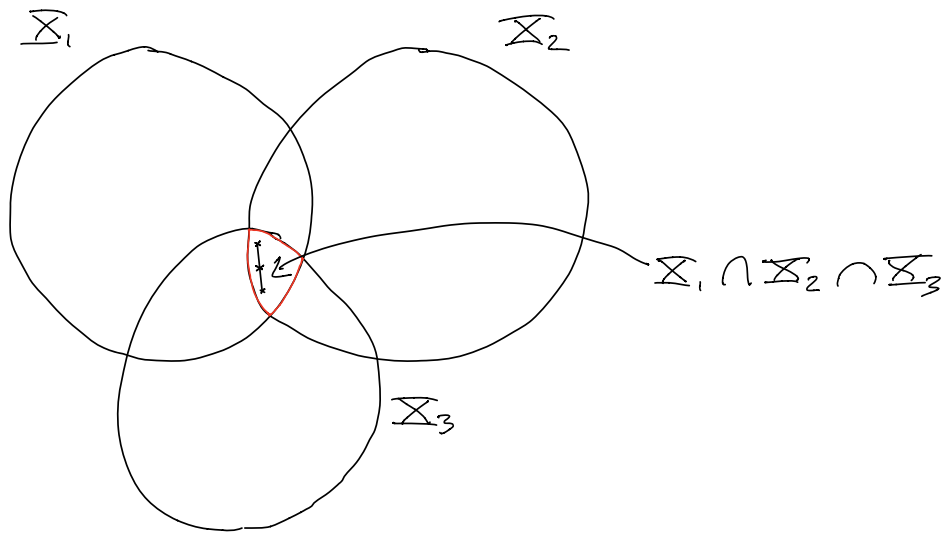
$X \in \{0,1\}^2$



SATS

X_i, $i = 1, \dots, m$, konvexa $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} X_i$ konvex.

Skärningen av konvexa mängder är konvex.



X_1, X_2, X_3 konvexa $\Rightarrow X_1 \cap X_2 \cap X_3$ konvex